# Содержание

# 1. Евклидовы пространства

## 1.1. Скалярное произведение

$L$ - линейное пространство $\quad \forall x, y \in L \quad \underset{x,y \to c \in \mathbb{R}}{c = (x, y) -}$ ск. произв.

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4. $\forall x \in L \ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими!

**Def.** Скалярная функция $c = (x, y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов $x$ и $y$

**Def.** Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

*Ex. 1.* ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{cases} |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi, & \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq 0 \\ 0, & \overrightarrow{a} = 0 \vee \overrightarrow{b} = 0 \end{cases}$$

*Ex. 2.* ЛП $= C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = 0$$

*Ex. 3.* ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ - сумма произведений компонент

## 1.2. Свойства евклидова пространства - $E$

**Th.** Неравенство Коши-Буняковского

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

□

Нетрудно заметить, что:

$\lessdot (\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \overset{\text{пусть}}{=} 0$

Решим относительно $\lambda$
$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y)$
$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y)$
Так как $(\lambda x - y) \geq 0$ (4-ое свойство ск. произв.), то уравнение имеет $\leq 1$ корня, значит $\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$
□

## 1.3. Норма

ЛП $= L, \forall x \in L$ определена функция так, что выполняется $x \to n \in \mathbb{R}, n = \|x\|$

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$ - неравенство треугольника

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

**Th.** $E^n$ является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

□

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:
$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = \|x\| + \|y\|$
$\sqrt{(x,x) + 2(x,y) + (y,y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$
$(x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + (y,y) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$
$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ - верно по неравенству Коши-Буняковского
□
Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

**Def.** $x, y$ - ортогональны, если $(x,y) = 0$ и $x \neq 0$ и $y \neq 0 \quad x \perp y$

**Def.** $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ - косинус угла между векторами

**Def.** $x, y \in E^n \quad x \perp y \quad z = x + y$ - гипотенуза

**Th.** $x \perp y$, тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

□

$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)^2 + \underbrace{2(x,y)}_{=0, x \perp y} + (y,y)^2 = (x,x)^2 + (y,y)^2$

□

**Def.** $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $L^n$

На $L^n$ введены $(x, y)$ и $\|x\|$ (то есть $L^n \to E^n_{\|\cdot\|}$ - нормированное евклидово)

$B$ называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

*Nota.* Докажем, что всякая такая система из $n$ векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \forall \lambda_i = 0$

$(e_k, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \overset{k \neq i \Rightarrow (e_k, e_i) = 0}{=\!=\!=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$

**Th.** Во всяком $E^n$ можно выделить ортонормированный базис

□

В $E^n_{\|\cdot\|}$ $\exists B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ - базис

? Можно ли выделить $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - ортонормированный базис?

Метод мат. индукции:

База: построим один ортогональный вектор для $\beta_1 = e'_1$ (потом $e_1 = \dfrac{e'_1}{\|e'_1\|}$)

Рассмотрим $e'_2 = \beta_1 - \lambda e'_1$. Требуем $e'_2 \perp e'_1$, то есть $(e'_1, e'_2) = 0$

Отсюда найдем нужный $\lambda : (e'_1, e'_2) = (e'_1, \beta_2 - \lambda e'_1) = (e'_1, \beta_2) - \lambda(e'_1, e'_1) = 0$

Тогда $\lambda = \dfrac{(e'_1, \beta_2)}{(e'_1, e'_1)}$

Переход: Пусть построена система ортогональных векторов $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\}$

Построим $k + 1$ систему:

Рассмотрим $e'_{k+1} = \beta_{k+1} - \lambda_k e'_k - \lambda'_{k-1} e'_{k-1} - \cdots - \lambda_1 e'_1 \quad (*)$

Требуем $e'_{k+1} \perp e_i \quad \forall i \in [1; k]$

$(e'_{k+1}, e'_k) = (\beta_{k+1}, e'_k) - \lambda_k (e'_k, e'_k) = 0$, так как $(e'_i, e'_j) = 0 \quad i \neq j$

$\lambda_k = \dfrac{(\beta_{k+1}, e'_k)}{(e'_k, e'_k)}$

Аналогично: $(e'_{k+1}, e'_{k-1}) = (\beta_{k+1}, e'_{k-1}) - \lambda_{k-1}(e'_{k-1}, e'_{k-1})$

$\lambda_{k-1} = \dfrac{(\beta_{k+1}, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})}$

□

Изложенный метод называется методом ортогонализации базиса, при этом $(*)$ определяет ненулевой вектор, иначе получим нулевую тривиальную линейную комбинацию векторов $\beta_i$ ($e_i$ выражается через них), но это невозможно, так как вектора базисные.

Полученную систему стоит нормировать

*Ex.* Формула скалярного произведения в о/н базисе

$E_{\|\cdot\|}, B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ - какой-либо базис

Рассмотрим $x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ и $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

Найдем $(x, y)$, как произведение компонент: $(x_1\beta_1+\dots+x_n\beta_n, y_1\beta_1+\dots+y_n\beta_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\beta_i, \beta_j)$

Обозначим $(\beta_i, \beta_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$

Таким образом, $(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ - дальше назовем квадратичной формой

Ранее (в аналитической геометрии) $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ - произведение координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в ДПСК (с о/н базисом)

Действительно: если $\beta_i = e_i,\ \beta_j = e_j,\ e_{ij} \in$ о/н базису

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Таким образом, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i$

Причем $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Longrightarrow x_i = (x, e_i)$

*Ex.* Система функций, непрерывных на $[0, 2\pi]$

$\Phi = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$

Система ортогональна (<u>Lab. </u>), но не нормированная (<u>Lab. </u>)

$\Phi_{\|\cdot\|} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \dots\}$ - нормированная система

Тогда функция, определенная и непрерывная на $[0, 2\pi]$ может быть разложена по базису $\Phi_{\|\cdot\|}$ и ее координат (как вектора): $f_i = \int_0^{2\pi} f \cdot e_i dx$, где $e_i \in \Phi_{\|\cdot\|}$

*Nota.* Изоморфизм $E^n \to E'^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

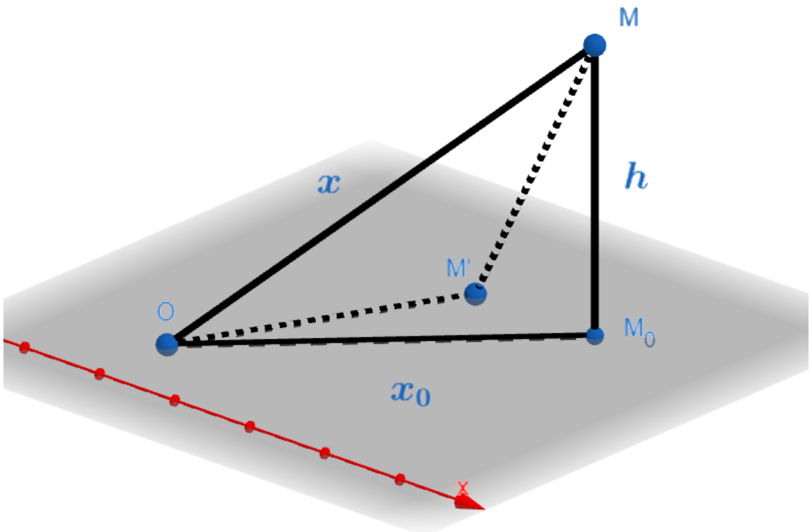
Ex: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x, y) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f * g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f * g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

## 1.4. Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства $E^n$ на подпространство $G$




Точка $M$ - конец вектора $x$ в пространстве $E^n$. Нужно найти $M_0$ (конец вектора $x_0$, проекции $x$ на $G$)

$$x_0 + h = x$$

где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора $h$ - минимальная длина от точки $M$ до $G$?

**Th.** $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$
$\square \|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \overset{\text{по теореме Пифагора}}{=\!=\!=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$

*Nota.* $x_0$ называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

*Алгоритм:* $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e2 + \cdots + \lambda_k + e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ - базис $G$ (необязательно ортонормированный)
Дан вектор $x$, пространство $G$, нужно найти $\lambda_i$
$h = x - x_0, \ h \perp G \quad (h, e_i) \overset{h \perp e_i \ \forall i}{=} 0$
$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0$
$(x, e_i) = (x_0, e_i)$
Тогда $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \cdots + \lambda_k (e_k, e_i)$ - $(e_k, e_i)$ - числа, а $\lambda_i$ - неизвестные
Получили СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \ldots & (e_k, e_k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \Gamma \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \ldots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

*Nota.* В матрице Γ нет нулевых строк, так как $e_i$ - бизисная и по крайней мере $e_i^2 \neq 0$

Таким образом по теореме Крамера $\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

**Def.** Матрицу $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

$\Gamma = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$, если базис ортонормированный

Далее, $I$ - единичная матрица Грама

*Nota.* Тогда $I \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$

**Приложения задачи о перпендикуляре**

1) Метод наименьших квадратов

В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

Ищем минимально отстоящую прямую от данных $(x_i, y_i)$, то есть ищем $\lambda$

Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^n (y_i - y_{0i})^2 = \Sigma_{i=1}^n (y_i - \lambda x_i)^2$ - минимизируем

Таким образом, ищем $y_0$ (ортог. проекция) такое, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ - минимальное

Если $y_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, где $x_i$ - набор измерений для $i$-ой точки

Рассмотрим $y_0$ как разложение по базису $\{x_i\}$

2) Многочлен Фурье

$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots a_n \cos nt + b_n \sin nt$ - линейная комбинация

Функции $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$ найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти $a_i$ и $b_i$ - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ ($k, m$ - нормирующие множители)

# 2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преображение)

## 2.1. Определение

*Линейный оператор* - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$
($V^n, W^m$ - линейные пространства размерности $n \neq m$ в общем случае),
которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и
$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A} x_1 + \mu \mathcal{A} x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$

*Nota.* Заметим, что если 0 представим как $0 * x$, где $x \neq 0$, то
$\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 * x) = 0 * \mathcal{A}x \overset{0*y}{=} 0$

*Nota.* Если $V = W$, то $\mathcal{A}$ называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: \quad V \to V$, $\mathcal{A}: \quad V^n \to W^n$

*Ex. 1.* $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков
$\mathcal{A}: V \leftarrow V$
$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких $\mathcal{A}$ как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

*Ex. 2.* $V^n = W^m$, где $m < n$
$\mathcal{A}$ - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

*Ex. 3.* $V^n$ - пространство числовых строк длины $n$
$\mathcal{A}: V^n \leftarrow V^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$
$$\mathcal{A}x = y : \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} x = y$$

## 2.2. Действия с операторами

**Def.** $\mathcal{A}\mathcal{B}: V \to W$

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \overset{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ - определение суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$
2. $(\lambda \mathcal{A})x \overset{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}$

*Nota.* Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \to W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) * A$
5. $\ldots LAB$

*Def:* $\mathcal{I}$ - тождественный - $\forall x \in V \quad \mathcal{I}x = x$

**Def.** Произведение операторов (композиция)
$\mathcal{AB}$ - произведение, $\mathcal{A} : V \to W$; $\mathcal{B} : U \to V$
$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x); \quad x \in U$
Свойства: Lab доказать
1* $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$
2* $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$
3* $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$
4* $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

*Nota.* Можно обобщить 4* на $n$ равных $\mathcal{A}$

**Def.** $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \ldots \mathcal{A}$ - $n$ раз, степень оператора
Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

## 2.3. Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A} : V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \Longrightarrow y_1 \neq y_2$
Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим
Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

**Th.** $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y}$ $\{y_i\}$ - линейно независима
В обратную сторону, если $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен
$\Box$ $\sqsupset$ $\mathcal{A} : V \to W$ и $0_V, 0_W$ - нули $V$ и $W$ соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{k} 0 \cdot e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$
2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - лин. нез., то $y_i \subset W$ - лин. нез.
   Составим $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\sqsupset$ $\{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$
   При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во $x_i$ и $y_i$ равно)
   $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \overset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то $0_W$ - образ $x = 0_V$, но так как $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие

3. $\sqsupset$ теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.

$\sum\limits_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \overset{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$

$\sum\limits_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A} x_i = 0_W$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \Longleftarrow \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B}: W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A}: V \to W$

если $\mathcal{BA} = \mathcal{AB} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

**Th.** $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \Longrightarrow x = 0$

**Th.** Необходимые и Достаточные условия существования $\mathcal{A}^{-1}$

$\exists \mathcal{A}^{-1} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \Longrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\sqsupset$ $\mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \overset{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\Longrightarrow} x = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

$\Longleftarrow$ Так как $\mathcal{A}$ - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}': W \to V$ - линейный оператор

? $\mathcal{A}'(\sum \lambda_i y_i) = \sum \lambda_i \mathcal{A}' y_i = \sum \lambda_i x_i$

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$

$\mathcal{A}(\sum \lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i$ и $y$ имеет только один прообраз $x$

Применим $\mathcal{A}'$ к $y = \sum \lambda_i y_i \quad \mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i$ - единственный прообраз $y$

Таким образом, $\mathcal{A}'$ переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть $\mathcal{A}'$ - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

## 2.4. Матрица ЛО

$\mathcal{A}: V^n \to W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{A} e_j$$

$$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\} - \text{ базис } W^m}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Def: Матрица $A = a_{ij}{}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ пространства $V^n$

Вопросы:

1) $\forall ? \mathcal{A}\ \exists A$

2) $\forall ? A\ \exists \mathcal{A}$

3) если $\exists A$ для $\mathcal{A}$, то единственная?

4) если $\exists \mathcal{A}$ для $A$, то единственная?

Ответы:

1) При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall \mathcal{A}\ \exists A$ (алгоритм выше)

3) такая $A$ единственная $\Longrightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}\quad A_e \neq A_{e'}$

2) $\forall A_{m\times n}$ можно взять пару ЛП $V^n, W^m$ и определить $\mathcal{A} : V^n \to W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$

4) Lab.

Nota: Далее будем решать две задачи

1) преобразование координат как действие оператора

2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

## 2.5. Ядро и образ оператора

**Def.** Ядро оператора - $Ker\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

**Def.** Образ оператора - $Im\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

*Nota.* $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - подпространства

*Nota.* $Ker\ \mathcal{A}$ и $Im\ \mathcal{A}$ - подпространства $V$ $(\mathcal{A} : V \to V)$

Вообще-то $Ker\ \mathcal{A} \subset V, Im\ \mathcal{A} \subset W$ $(\mathcal{A} : V \to W)$

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A} : V \to V'$ (где $V'$ изоморфен $V$)

$Ker\mathcal{A}$ - подпространство, то есть $Ker\mathcal{A} \subset V$ и $\sum c_i x_i \subset \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in Ker\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \overset{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$

Следствие: $Ker\mathcal{A} = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

□ От противного:

$\sqsupset \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in Ker\mathcal{A}$ - противоречие

*Nota.* Обратное также верно:

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0$

Тогда $0$ является образом только $0$-вектора $\Longrightarrow Ker\mathcal{A} = 0$

*Nota.* Также очевидно, что

$Ker\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow Im\mathcal{A} = V$

$Ker\mathcal{A} = V \Longrightarrow Im\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A} = 0$

**Th.** $\mathcal{A} : V \to V$, тогда $\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = \dim V$

□ Так как $Ker\mathcal{A}$ - подпространство $V$, то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса $V$: $e_1^k, \dots e_m^k, e_{m+1}^k, \dots e_n^k$)

Обозначим дополнение $W$, тогда $Ker\mathcal{A} \oplus W = V \Longrightarrow \dim Ker\mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что $W$ и $Im\mathcal{A}$ - изоморфны

$\mathcal{A} : W \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A} : Ker\mathcal{A} \to 0$

Докажем, что $\mathcal{A}$ действует из $W$ в $Im\mathcal{A}$ взаимно-однозначно

$\sqsupset \mathcal{A}$ невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \overset{\text{обозн.}}{=} x \in Ker\mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup Ker\mathcal{A} = 0, x \ni W \cup Ker\mathcal{A} \Longrightarrow$ предположение неверно

$\Longrightarrow \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\Longrightarrow \dim W = \dim Im\mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A} : V \to V$

$W_1 = Ker\mathcal{A}, W_2 = Im\mathcal{A}$

**Def.** Рангом оператора $\mathcal{A}$ называется $\dim Im\mathcal{A}$: $rang\mathcal{A} \overset{def}{=} \dim Im\mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = rank\mathcal{A})$

*Nota.* Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \to W^m$

$A$ - матрица $\mathcal{A}, x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n, y = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$

$$\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e_i'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_m' \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

*Nota.* Поиск матрицы $\mathcal{A}$ можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $Ker\mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - rangA)$ и при этом $\dim K = n - \dim Im\mathcal{A}$

$rang\mathcal{A} = rangA = \dim Im\mathcal{A}$

Следствия (без док-в)

1) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq rang(\mathcal{A})$ (или $rang\mathcal{B}$)

2) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq rang(\mathcal{A}) + rang(\mathcal{B}) - \dim V$

*Nota.* Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \to V^n$ (переход из системы $Ox_i \to Ox'_i,\ i = 1..n$)

$\dim ImT = n, \dim KerT = 0 \Longrightarrow T$ - вз.-однозн.

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e\to e'}$

## 2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

**Th.** $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

$\{e_i\} \overset{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \overset{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства $V$

$\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\sqsupset A, A'$ - матрицы $\mathcal{A}$ в базисах $e$ и $e'$

Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'})$

$\square \sqsupset y = \mathcal{A}x$, где $x, y$ - векторы в базисе $e$ ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где $x', y'$ - векторы в базисе $e'$

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax,\ y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \Longrightarrow A' = TAT^{-1}$

**Th.** $A' = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'}$

*Nota.* $C = A + \lambda B$

Следствия:

1) $TCT^{-1} = T(A+\lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$

2) $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$

3) $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

*Nota.* То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании $T$

**Def.** Матрица $A$ называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1 \ \forall i, j (i \neq j) \sum\limits_{kk=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$

В общем $(A_i, A_j) = \left[\begin{array}{l} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{array}\right.$

**Def.** Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна

? $A$ ортогональна в каком-либо базисе или во всех?

Свойство. $\mathcal{A}$ - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \overset{2}{\det}(A) = \det(I)$)

**Th.** $T_{e \to e'}$ - преобразование координат в $V^n$. Тогда $T$ - ортогональный оператор

Базис $e$ - ортонормированный базис

$\square \quad \urcorner$ в базисе $e$ матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e'_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e'_1$

$1 = (e'_1, e'_1) = (\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$ - то есть строка - единичный вектор

$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_1 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица $T$ - ортогональна

*Nota.* Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

## 2.7. Собственные векторы и значения оператора

**Def.** Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \to V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V | \mathcal{A}x \in V_1\}$

*Ex.* $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a;b]$, $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$

*Nota.* $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ - инвариантные $(A : V \to V)$

**Def.** Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A} : V \to V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в неком базисе)
$\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

*Nota.* Матрица $A - \lambda I$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

*Nota.* Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

**Def.** Собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda$, называется $x \neq 0 \mid \mathcal{A}x = \lambda x$

**Def.** Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее числу $\lambda_i$,
$U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

**Def.** $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа $\lambda_i$

**Th.** $\mathcal{A}x = \lambda x \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \to V^n$
$\square \Longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow rang(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Im(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Ker(A - \lambda I) \geq 1$
$\exists x \in Ker(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \Longleftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \Longleftrightarrow Ax = \lambda x$

*Nota.* По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет $n$ корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

**Def.** Кратность корня $\lambda_i$ называется алгебраической кратностью

**Th.** $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \Longrightarrow x_1, x_2$ - линейно независимы
$\square$ Составим комбинацию: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \sqsupset \lambda_2 \neq 0$

$c_1\mathcal{A}x_1 + c_2\mathcal{A}x_2 = 0 \iff c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0$

Умножим $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ на $\lambda_2$: $c_1\lambda_2x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0$

$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 - c_1\lambda_2x_1 - c_2\lambda_2x_2 = 0$

$c_1x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима

Если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2\lambda_2x_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

*Nota.* Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для $k$-ой системы собственных векторов для попарно различных $k$ чисел $\lambda$

**Th.** $\lambda_1, \dots \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A}: V \to V$, им соответствуют $U_{\lambda_i}$ - собственные подпространства $V$ для $\lambda_i$

$\sqsupset e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$

Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ (*)

Тогда система $e$ - линейно независима

□ Составим линейную комбинацию:

1) $\sqsupset \quad \overbrace{\alpha_1e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1}e_{k_1}^{(1)}}^{x_1\in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p}e_{k_p}^{(p)}}^{x_p\in U_{\lambda_p}} = 0$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$ ($x_i$ - линейно независимы, так как $\lambda_i$ - различны) - этого не может быть, так как $\forall i\ x_i \neq 0$ (как собственный вектор)

2) В $\forall U_{\lambda_i}$ содержится 0-вектор. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \forall x_i = 0$

Но $x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} c_ie_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, т. е. л/нез) $\Longrightarrow \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

□

*Nota.* Таким образом, объединение базисов собственных подпространств $U_{\lambda_i}$ образует линейно независимую систему в $V^n$

Что можно сказать о размерности системы $e$ (*) ?

Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i$, $\beta_i$ - геометрическая кратность $\lambda_i$

Очевидно, $S \leq n$

**Th.** $S = n \iff \exists$ базис $V^n$, составленный из собственных векторов

□ Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов

Если $S = n$, получаем $n$ собственных векторов, линейно независимых - базис $V^n$

Если $\exists$ базис из $n$ лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

□

*Nota.* Условие Th равносильно: $V^n = \sum_{i=1}^{p} \oplus U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно: $\dim V^n = \sum_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j\ U_{\lambda_i} U_{\lambda_j} = 0$

*Ex.* Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

**Def.** Оператор $\mathcal{A}$ диагонализируемый, если существует базис $e \mid A_e$ - диагональна

**Th.** $\mathcal{A}$ - диаг.-ем $\Longleftrightarrow \exists$ базис из собственных векторов

□ $\Longleftarrow e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор (def): $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A} e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A} e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A} e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \dots e_i = \mathcal{A} e_i$$

$\Longrightarrow \exists f$ - базис, в котором $A_f$ - диагональная (по $-$äèàã. $-$ åì)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$\mathcal{A} f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \Longrightarrow \alpha_i$ - собственное число (по def), а $f_i$ - собственный вектор

□

*Nota.* О связи алгебраической и геометрической кратностей ($\alpha$ - алг., $\beta$ - геом.)

1) $\alpha, \beta$ не зависят от выбора базиса

□$\beta_i$ по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

Для $\alpha$: строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_i$ с кратностью $\alpha_i$, $\alpha = \sum \alpha_i$

$\sqsupset A_g$ - матрица $\mathcal{A}$ в базисе $g$

Но $A_g = T_{f \to g} A_f T_{g \to f}$ или для оператора

$A_g - \lambda I = T_{f \to g}(A_f - \lambda I) T_{g \to f} = \overbrace{T_{f \to g} A_f T_{g \to f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \to g} I T_{g \to f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$

Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

**Def.** Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) $\Longrightarrow$ одинаковая кратность

□

2) Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагонализируемого оператора $\alpha = \beta$

## 2.8. Самосопряженные операторы

**1* Сопряженные операторы**

!!! Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественном полем

Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

*Мет.* Скалярное произведение

$(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

3) $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

4) $(x, y) = (y, x)$ в $\mathbb{R}$. Но в комплексном множестве: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Тогда $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$

*Мет.* $(x, y)$ в $\mathbb{R}$

$(x, y) = (y, x)$

Но. $(x, y)$ в комплексном множестве

$(x, y) = \overline{(y, x)}$

Важно: линейность по первому аргументу - везде

$(\lambda x, y) \overset{\mathbb{R}, C}{=} \lambda(x, y)$

Но:

$(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ в $\mathbb{R}$

$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ в $C$

**Def. 1.** Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$

**Def. 2.** $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

**Def. 1.** $\Longleftrightarrow$ **Def. 2.**

$(\mathcal{A}x, y) \overset{\text{на языке матриц}}{=\!=\!=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$

$||$

$(x, \mathcal{A}^* y) = X^T \cdot (A^* Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \Longrightarrow A^* = A^T$

<u>Lab.</u> Очевидно существование $\mathcal{A}^*$ $\forall \mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием $\mathcal{A}^T$)

Доказать единственность $\mathcal{A}^*$ рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^* y) \neq (x, \mathcal{A}_2^* y))$

Свойства:

1) $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$ $\square(\mathcal{I}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I}y)$ $\square$

2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$

3) $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$

4) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

5) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)

или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

6) $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор ($\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y'$)

Можно использовать линейные свойства умножения матриц $A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathcal{A}^*X + \mu\mathcal{A}^*Y$

**2* Самосопряженный оператор**

**Def.** $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \Longrightarrow$ матрица $A$ симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \lambda:\ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\square(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ $(x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \overset{\text{в } C}{=} \overline{\lambda}(x, y)$

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Longrightarrow \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\square$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Тогда $x_1 \perp x_2$

$\square$ Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$\lambda_1(x_1, x_2) = ({}_1x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2) = 0$ $\square$

**Th.** Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, $e$ - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка $e$ - инвариантное подпространство для $\mathcal{A}$)

$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$

Тогда $V_1$ - инвариантное для $\mathcal{A}$

$\square$ Нужно доказать, что $\forall x \in V_1$ $\mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$

$(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \overset{x \perp e}{=\!=} 0$

$\square$

**Th.** $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A} : V^n \to V^n$), тогда $\exists e_1, \ldots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

Наводящие соображения.

*Ex. 1.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\mathcal{I}x = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

*Ex. 2.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$

$\mathcal{O}x = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x \ \mathcal{O}x = 0 \in U_\lambda$

*Ex. 3.* Поворот $\mathbb{R}^2$ на $\dfrac{\pi}{4}$

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ - вещественных корней нет

$\square$ $\sqsupset$ $e_1$ - какой-либо собственный вектор $\mathcal{A}$ ...

**Th.** $\mathcal{A} : V^n \to V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

$\square$ $e_1$ - собственный вектор $\mathcal{A}$

$e_1$ найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиального решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \overset{\mathcal{A}\text{ - самосопр.}}{\implies} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора $e_1$ строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве $V_1$ $\mathcal{A}$ действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$.

Для $e_2$ строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, $V_3, V_4, V_5, \dots$, в котором, найдя $e_i$, ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из $e_i$, который можно нормировать

$\square$

*Nota.* Чтобы упорядочить построение базиса, в котором $V_i$ может брать $\max \lambda_i$

*Nota.* Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализируется: $\Sigma$ алг. крат. $= n$ (степень уравнения), а $\Sigma$ геом. крат. $= \dim\{e_1, \dots,_n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов $\mathcal{A}$ (ортонорм.)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

**Def.** Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное $e_i$ (линейная оболочка)

Свойства:

1) $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)

2) $P_i P_j = 0$

3) $P_i = P_i^*$ $\quad ((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \Longleftrightarrow (P_i x, y) = ((x, e_i)e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i)e_i) = (x, P_i y)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов $\mathcal{A}$, то

$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$

$\mathcal{A}x \stackrel{y=\Sigma(y,e_i)e_i}{=} \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}x, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathcal{A}e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \lambda_i e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x$

$\Longleftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ - спектральное разложение $\mathcal{A}$, спектр $= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \le \dots \le \lambda_n\}$

*Ex.*

$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1)e_1 + (y, e_2)e_2 = (\mathcal{A}x, e_1)e_1 + (\mathcal{A}x, e_2)e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$

## 2.9. Ортогональный оператор

*Mem.* Орт. оператор $T : V^n \to V^n \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall$ о/н базиса матрица $T$ - ортогональная $T^{-1} = T^T$

*Nota.* Иначе, $T$ - ортогональный оператор $\Longleftrightarrow T^{-1} = T^* \Longrightarrow TT^* = I$

**Def.** $T$ - ортог. оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть $T$ сохраняет расстояние

*Nota.* Ранее в теореме об изменении матрицы $A$ при преобразовании координат $T$ - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица $A_f$

1) Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Находим $e_1, \dots e_n$ - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e\to f}A_fT_{f\to e}=A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного $\mathcal{A}$ - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлением

# 3. Билинейные и квадратичные формы

## 3.1. Билинейные формы

**Def.** $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \to \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$
2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

*Ex.*

1) $\mathcal{B}(x, y) \overset{\text{в } E^n_{\mathbb{R}}}{=} (x, y)$
2) $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор $x$ на $y$

Матрица Б.Ф.

**Th.** $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $V_n$, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

□

$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$

$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(\sum\limits_{i=1}^n u_i e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i \mathcal{B}(e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i (\sum\limits_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)) \overset{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \sum\limits_{i=1}^n u_i \sum\limits_{j=1}^n v_j b_{ij} =$
$\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$

□

*Nota.* Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

**Def.** Если

1) $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - симметричная
2) $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то $\mathcal{B}$ - антисимметричная
3) $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то $\mathcal{B}$ - кососимметричная (в $C$)

**Def.** $rang \mathcal{B}(u, v) \overset{def}{=} rang B$

*Nota.*

1) $\mathcal{B}$ называется невырожденной, если $rang \mathcal{B} = n$

2) $rang\mathcal{B}_e = rang\mathcal{B}_{e'}$ ($e, e'$ - различные базисы $V^n$), то есть $rang\mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \to e'$

*Ex.* $\mathcal{B}(u,v) \overset{\text{ск. пр.}}{=} (u,v)$
$\begin{matrix} u = u_1e_1 + u_2e_2 \\ v = v_1e_1 + v_2e_2 \end{matrix}$, тогда $\mathcal{B}(e_i, e_j) \overset{\text{об}}{==} b_{ij} = (e_i, e_j)$
Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

*Ex.* $\begin{matrix} u(t) = 1+3t \\ v(t) = 2-t \end{matrix}$, $\{e_i\} = (1,t)$, $\mathcal{B}(u,v) = (u,v) = \displaystyle\int_{-1}^{1} uvdt$
Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 tdt \\ \int_{-1}^1 tdt & \int_{-1}^1 t^2dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

*Nota.* Особое значение имеют симметричные билинейные формы
Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется
Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

## 3.2. Квадратичные формы

**Def.** Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u,v)$, называется форма $\mathcal{B}(u,u)$

*Ex.* Поверхность
$u = (x,y), v = (x,y,z)$
$\mathcal{B}(u,u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$
$\mathcal{B}(v,v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$

*Mem.* Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

*Nota.* Заметим, что здесь коэфф. $a_{ij}$ соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:
$B(v,v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$
Если диагонализировать $B(v,v)$, то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:

$\mathcal{B}(v,v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

**Def.** Положительно определенная форма

*Nota.* Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если

$\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$

2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если

$\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

**Th.** 1), 2) $\Longleftrightarrow \forall \lambda_i$ - с. число $\mathcal{A}$, $\lambda_i > 0$

$\square \Longrightarrow \quad \lambda_i$ - с. число, $e_i$ - соответствующий им с. вектора

$\forall x \in V \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\Longleftarrow \quad 1) \Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) = \lambda_i > 0\ \forall i$

$\square$

*Nota.* $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

**Th.** Критерий Сильвестра

$\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - положительно определен $\Longleftrightarrow \forall k = 1..n\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

$\square \Longrightarrow \quad \mathcal{A}$ - пол. опред.

$\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \leq n$

$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \overset{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$

$\Longleftarrow$ ММИ

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$

1) Для $k = 1 \quad \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}_{n-1}$ - пол. опр. $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ - пол. опр.

1) $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}$ диагон. $\mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n$ Для $i \le n-1$ все $\lambda_i > 0$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i e_i) = \overbrace{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2$ - знак зависит от $\lambda_n$

$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \Longrightarrow \lambda_n > 0 \Longrightarrow (\mathcal{A}x, x) > 0$

□

*Ex.* Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \ \forall k$

Положительная определенность - наличие экстремума

**Def.** Оператор $\mathcal{A}$ называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

*Nota.* Для $-\mathcal{A}$ работает критерий Сильвестра: $\Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$

Таким образом, $\mathcal{A}$ - отриц. опред. $\Longleftrightarrow \Delta_k$ чередует знаки

*Nota.* Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots$ через оператор

Так как $\mathcal{B}(u, v)$ и $\mathcal{B}(u, u)$ - числа, то $\mathcal{B}$ - называется пол. опред., если $\mathcal{B}(u, v) > 0$

*Nota.* После приведения $\mathcal{B}(u, v)$ к каноническому виду, получаем

$\mathcal{B}(u, u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$

В общем случае $\lambda_i$ любого знака

Но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)

# 4. Дифференциальные уравнения

## 4.1. Общие понятия

### 1* Постановка задачи

*Pr. 1.* Скорость распада радия в текущий момент времени $t$ пропорциональна его наличному количеству $Q$. Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось $Q_0$
Коэффициент пропорциональности $k$ найден эмпирически.
Решение. Скорость распада.
$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ$ - ищем $Q(t)$
$dQ(t) = kQdt$
$\underbrace{\frac{dQ(t)}{Q}}_{\text{содержит только } Q} = \underbrace{kdt}_{\text{содержит только } t}$ - «разделение переменных»
Внесем все в дифференциал:
$d\ln Q = kdt = dkt$
$d(\ln Q - kt) = 0$
Нашли семейство первообразных:
$\ln Q - kt = \tilde{C}$
$\ln Q = \tilde{C} + kt$
$Q = e^{\tilde{C}+kt} \overset{e^{\tilde{C}}=C}{=\!=\!=} Ce^{kt}$
По смыслу $k < 0$, так как $Q$ уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы $C$ определен Н.У. (начальными условиями):
$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$
Тогда, закон - $\boxed{Q^*(t) = Q_0e^{-nt}}$

*Nota.* Оба закона: общий $Q(t) = Ce^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:
$Q'(t) = kQ$ (явный вид)
$d\ln Q(t) - kdt = 0$ (в дифференциалах)

*Pr. 2* Тело массой $m$ брошено вверх с начальной скоростью $v_0$. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.
По II закону Ньютона:
$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$

$a = \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g}$ - ДУ

<u>Решение.</u> $y''(t) = -g$

$(y'(t))' = -g$

$y'(t) = -\int g dt = -gt + C_1$

$y(t) = \int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом, $\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$

Найдем $C_1$: $y'(t_0) = y(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем $C_2$: $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон: $\boxed{y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$

**2* Основные определения**

**Def. 1.** Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ $n$-ого порядка $(*)$

*Ex.* $Q' + nQ = 0$ и $y'' + g = 0$

**Def. 2.** Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

**Def. 2'.** Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения $(*)$

*Nota.* Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

**Def. 3.** Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

**Def. 4.** $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

*Nota.* Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

**Th.** $y' = f(x, y)$ - ДУ
$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ
Если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в $M_0$, то ЗК
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Начальному Условию (без док-ва)

*Nota.* Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$
См. определения обыкновенных и особых точек

**Def. 5.** Точки, в которых нарушаются условия теоремы, называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

**Def. 6.** Общим решением ДУ $(*)$ называется $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

*Nota.* $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$ - общий интеграл

**Def. 7.** Решением $(*)$ с определенными значениями $C_1^*, \dots, C_n^*$ называется частным

*Nota.* Форма записи:
Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$
Сведем к виду: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \Longrightarrow -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \Longrightarrow$
$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах

## 4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

*Nota.* Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ
1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2) Однородное уравнение (ОУ)
3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

## 1* УРП

**Def.** $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0 \quad y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y')dx = 0$

Интегрируем по $dx$:

$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right) dx = const$

По свойствам интеграла:

$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$

или: $\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

*Ex.* $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

*Nota.* В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

## 2* ОУ

**Def. 1.** Однородная функция $n$-ого порядка называется функция $f(x,y)$ такая, что
$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

*Ex.* $f = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}) = \cos(\dfrac{x}{y})$ - нулевой порядок однородности
$f = \sqrt{x^2+y^2}$ - первый порядок

**Def. 2.** $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \text{ где } P(x,y), Q(x,y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - ОУ

Решение $P(x,y) = P\left(x\cdot 1, x\cdot\dfrac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
$Q(x,y) = x^k Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
Тогда, $P\left(1,\dfrac{y}{x}\right)dx + Q\left(1,\dfrac{y}{x}\right)dy = 0.$
Обозначим $\dfrac{y}{x} = t, \quad y' = \dfrac{dy}{dx} \overset{y=tx}{=\!=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$
$P(1,t) + Q(1,t)y' = P(1,t) + Q(1,t)(t'x+t) = 0$
$t'x + t = -\dfrac{P(1,t)}{Q(1,t)} \overset{\text{обозн}}{=} f(t)$
$t'x = f(t) - t$
$\dfrac{dt}{dx}x = f(t) - t \neq 0$
$\dfrac{dt}{f(t)-t} = \dfrac{dx}{x}$
$\displaystyle\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} = \ln|Cx|$
$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x,y)$ - общий интеграл
Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \dfrac{y}{x} \to y = kx$ - тоже решение

*Ex.* $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$
$\dfrac{y}{x} = t \quad y' = t'x + t$
$y = tx \quad dy = (t'x+t)dx$
$(x+tx)dx + (x-tx)(t'x+t)dx = 0$
$(1+t) + (1-t)(t'x+t) = 0$
$t'(1-t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$
$t'(1-t)x = t^2 - 2t - 1$
$\dfrac{(1-t)dx}{t^2-2t-1} = \dfrac{dx}{x}$ - УРП
$\dfrac{(1-t)dt}{(1-t)^2-2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d((1-t)^2)-2}{(1-t)^2-2} = -\dfrac{1}{2}\ln|(1-t)^2-2| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}} = \ln|Cx|$
$\tilde{C}x = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}} \Longleftrightarrow Cx^2 = \dfrac{1}{(1-t)^2-2} = \Longleftrightarrow Cx^2((1-t)^2-2) = 1$
$C((y-x)^2 - 2x^2) = 1$
$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$

$y^2-2xy-x^2=C$ - гиперболы
$(t-1)^2-2=0 \quad \dfrac{y}{x}=1\pm\sqrt{2} \quad y=(1\pm\sqrt{2})x$ - асимптоты

## 3* Уравнение в полных дифференциалах

**Def.** $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

<u>Решение</u> *Мет.* **Th.** об интеграле НЗП $\quad \exists\Phi(x,y)\mid d\Phi=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$

*Ex.* $(x+y)dx+(x-y)dy=0 \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$
$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{(0,0)}^{(x,0)}xdx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y)dy=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)}+(xy+\dfrac{y^2}{2})\Big|_{(x,0)}^{(x,y)}=\dfrac{x^2}{2}+$
$xy-\dfrac{y^2}{2}+C$ - общий интеграл
$x^2+2xy-y^2=C$

## 4* ЛДУ

**Def.** $\boxed{y'+p(x)y=q(x)}$ - ЛДУ$_1$
$p,q\in C_{[a,b]}$

*Nota.* Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)
Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим $y_0$), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y=C(x)y_0$

**Def.** Однородное (ЛОДУ): $y'+p(x)y=0$

**Def.** Неоднородное (ЛНДУ): $y'+p(x)y=q(x)$

*Ex.* $\sqsupset y(x)=x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ
А $y_0=xe^{-x}$, тогда $y=xxe^{-x}=C(x)xe^{-x}$
То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y=y(x)$
<u>Решение</u> а) $y'+p(x)y=0$

$\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ - УРП

$\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$

$\ln|\tilde{C}y| = -\displaystyle\int p(x)dx$

$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx} = Cy_0$

б) $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$

$C'(x) = \dfrac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

*Мет.* $y' + p(x)y = q(x)$

1) $y' + p(x)y = 0$

$\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$

$y_0 = e^{-\int p(x)dx}$

$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$ - общее решение ЛОДУ

2) $y' + p(x)y = q(x)$

$y(x) = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C(x)(y_0' + p(x)y_0) = 0$ - так как $y_0$ - решение ЛОДУ

$C'(x) = \dfrac{q(x)}{y_0}$

$C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$

Окончательно, $y(x) = \left(\left(\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)dx\right)e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int pdx} + e^{-\int pdx}\displaystyle\int qe^{\int pdx} = \overline{y} + y^*$

## 4.3. Существование и единственность решения

*Мет.* $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ **Th.** Если $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x,y) \in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - огр. в } U(M_0), \end{cases}$ то в $M_0$ $\exists! y(x)$ - решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если $\forall$ его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

**Def.** $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область $D$
Соответственно точки $D$ могут быть особыми или обыкновенными (выпол. усл. **Th.** )

Условия особого решения $P(x,y)$ или $Q(x,y)=0$

*Ex.* 1. $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx \longrightarrow \sqrt{1-y^2}dx-dy=0$

Обычное решение

$\arcsin y = x+C$

$y=\sin(x+C)$

Особое решение:

$p=\sqrt{1-y^2}=0$

$1-y^2=0\to y=\pm 1$

*Ex.* 2. $\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy=dx \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}dy-3dx=0$

$y^{\frac{1}{3}}=x+C$

$y=(x+C)^3$

$dy-3y^{-\frac{2}{3}}=0$

$P=0\Longrightarrow y=0$

# 4.4. ДУ высших порядков

*Nota.* Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ
1* Непосредственно интегрирование
$y^{(n)}=f(x)$
Решение: $y^{(n-1)}=\displaystyle\int f(x)dx+C_1$
$y^{(n-2)}=\displaystyle\int(\int f(x)dx+C_1)dx+C_2$

*Ex.* См. Задачу 2 в начале
2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$
$F(x,y'(x),y''(x))=0$
Замена $y'(x)=z(x)$, получаем:
$F(x,z(x),z'(x))=0$ - ДУ$_1$

*Ex.* $(1+x^2)y''+(1+y'^2)=0 \quad y'=z$
$(1+x^2)z'+1+z^2=0$
$z'+\dfrac{1+z^2}{1+x^2}=0\Longleftrightarrow z'=-\dfrac{1+z^2}{1+x^2}\Longleftrightarrow \dfrac{dz}{1+z^2}=-\dfrac{dx}{1+x^2}$
$\arctan x=\arctan(-x)+C$
$z=\dfrac{-x+\tan(C)}{1+x\tan C}=y'$
$y=\displaystyle\int\frac{-x+\tan(C)}{1+x\tan C}dx=\dots$
3* ДУ$_2$, не содержащие $x$
$F(y(x),y'(x),y''(x))=0$

Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \dfrac{dz(y(x))}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$
ДУ: $F(y, z(y), z'(y)) = 0$

*Ex.* $y'' + y'^2 = yy'$
$y' = z(y) \quad y'' = z'z$
$z'z + z^2 = yz \quad | \ : z \neq 0 \qquad z = 0 \Longrightarrow y = const$
$z' + z = y$ - ЛДУ

1) $z' + z = 0$
$\ln|z| = -y + C$
$z = Ce^{-y}$

2) $C'(y)e^{-y} = y$
$C'(y) = ye^y$
$C(y) = \int ye^y dy = \int yde^y = ye^y - e^y + C_1$
$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1e^{-y}}_{\overline{z}}$
$y' = C_1e^{-y} + y - 1 \Longrightarrow ? \ldots$

## 4.5. ЛДУ$_2$

### 4.5.1. Определения

**Def.** $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(x)} + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a^n(x)y = f(x)$, где $y = y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ$_n$

*Nota.* Если $n = 2$ - ЛДУ$_2$, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$ - разрешенное относительно старших производных ЛДУ$_2$

*Nota.* Если $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ - ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами

### 4.5.2. Решение ЛДУ$_2$ с постоянными коэффициентами

$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$
$\forall p, q \in \mathbb{R} \exists$ уравнение: $\quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$ - корни
Назовем уравнение характеристическим (ХрУ)

*Nota.* $\lambda_{1,2}$ могут быть только
1) вещественными различными;
2) вещественными одинаковыми ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ - корень 2-ой кратности);
3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Запишем ЛДУ$_2$ через $\lambda_{1,2}$:

$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$y'' - \lambda_1 y' - \lambda_2 y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$(y' - \lambda_2 y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = f(x)$

Обозначим $u(x) = y' - \lambda_2 y$

Тогда ДУ: $\begin{cases} y' - \lambda_2 y = u(x) \\ u' - \lambda_1 u = f(x) \end{cases}$

Решим: $u' - \lambda_1 u = f(x)$

1) $u' - \lambda_1 u = 0$

$\frac{du}{u} = \lambda_1 dx$

$\overline{u} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

2) $u' - \lambda_1 u = f(x)$

$u(x) = C_1(x)e^{\lambda_1 x}$

Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ$_2$ $(f(x) = 0)$

Эта система $\begin{cases} y' - \lambda_2 y u(x) \\ u' - \lambda_1 u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' - \lambda_2 y u(x) \\ u = C_1 e^{\lambda_1 x} \end{cases}$

Решим $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$:

1) $y' - \lambda_2 y = 0$

$\overline{y} = C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$y(x) = C_2(x)e^{\lambda_2 x}$

$C_2'(x)e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 = \lambda_2} x$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

*Мет.* $y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

Для начала $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ$_2$

$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$

Рассмотрим три случай для $\lambda_{1,2}$

1) $\lambda_{1.2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \underbrace{\frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\tilde{C_1}} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда, $y(x) = C_2(x)e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C_1} e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2)e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ - случай вещ. кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \Longrightarrow C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ - случай комплексно сопряженных корней

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ - решение ЛОДУ

Получим $\mathbb{R}$-решения:

$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}(C_1 + C_2)\cos\beta x + e^{\alpha x} i(C_1 - C_2)\sin\beta x$

$Rey(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x}_{u(x)}, Imy(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$

Так как $y(x)$ - решение ЛОДУ:

$u'' + iv'' + pu' + ipv\prime + qu + iqv = 0$

$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv\prime + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$, то есть $z \in \mathbb{C}$ и $z = 0$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv\prime + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ - решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

*Nota.* Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)
Также еще не решено ЛНДУ$_2$

## 4.5.3. Свойства решений ЛДУ$_2$

**Def.** $Ly \overset{def}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ - лин. дифф. оператор
$L : E \subset C^2_{[a;b]} \to F \subset C_{[a;b]}$

*Nota.* Все определения лин. пространства, базиса, лин. независимости, лин. оболочки сохраняются
И ЛДУ$_2$ записывается как $Ly = 0$ - ЛОДУ$_2$, $Ly = f(x)$ - ЛНДУ$_2$

**Th. 1.** $\exists y_1, y_2$ - частные решение ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$
Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

□

$Ly = y'' + py' + qy = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 = 0$

□

**Def.** $y_1, y_2$ - лин. нез. $\iff C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

*Mem.* Для определения лин. независимости в Линале использовали $rgA$ или $\det A$
Введем индикатор лин. независимости
Заметим, что если $y_1, y_2$ - лин. зав., то $y_1', y_2'$ - лин. зав.

**Def.** $W \overset{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ - определитель Вронского или вронскиан

**Th. 2.** $y_1, y_2$ - лин. зав. $\Longrightarrow W = 0$ на $[a;b]$

□

$$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y_2' = ky_1' \end{matrix} \Longrightarrow W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

**Th. 3.** $x_0 \in [a;b], \quad \sqsupset W(x_0) = W_0$

Тогда $\begin{matrix} W_0 = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \forall x \in [a;b] \\ W_0 \neq 0 \Longrightarrow W(x) \neq 0 \forall x \in [a;b] \end{matrix}$

□

$\sqsupset y_1(x), y_2(x)$ - реш ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1''y_2 + py_1'y_2 + qy_1y_2 = 0 y_2''y_1 + py_2'y_1 + qy_1y_2 = 0 \end{cases}$$

$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + p(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$

$W'(x) + pW(x) = 0$

$\dfrac{dW(x)}{W(x)} = -pdx$

$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} pdx}$

$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} pdx} = C$

Тогда $W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} pdx} \Longleftrightarrow \left[\begin{matrix} W_0 = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \Longrightarrow W(x) \neq 0 \end{matrix}\right. \quad \forall x \in [a;b]$

□

**Th. 4.** $y_1, y_2$ - лин. нез. $\Longrightarrow W(x) \neq 0$ на $[a;b]$

□ Докажем от противного

$\sqsupset \exists x_0 \in [a;b] \mid W(x_0) = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \forall x \in [a;b] \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \forall x \in [a;b]$

Можно поделить на $y_1^2$, так как $y_1, y_2$ - лин. нез. Тогда $\dfrac{W}{y_1^2} = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Longrightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y_2 = ky_1$ - лин. зав., противоречие

□

*Nota.* Общее решение ЛОДУ$_2$ - это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$ и ему соответствует свой и единственный набор $(C_1, C_2)$

**Th. 5.** $y_1, y_2$ - лин. нез. решения ЛОДУ, тогда $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ - общее решение ЛОДУ$_2$

□ Нужно убедиться, что через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит и только одна кривая $\overline{y}(x_0)$

Зададим НУ: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$, тогда $\begin{matrix} \overline{y}(x_0) = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ \overline{y}'(x_0) = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} \end{matrix}$ - задача Коши

Знаем, что $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - решение (просто, не общее)

Тогда в $x_0$ $\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \overline{y}_0 \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = \overline{y}'_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{y}'_0 \end{pmatrix}$ - система крамеровского типа

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \iff \exists!(C_1, C_2)$ - решение СЛАУ

Таким образом через всякую $x_0$ проходит одна! кривая $\overline{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

□

*Nota.* Вывод: если найдены какие-либо лин. нез. $y_1, y_2$, то общее решение ЛОДУ$_2$ будет $C_1 y_1 + C_2 + y_2 = \overline{y}$

**Def.** Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ$_2$

*Nota.* Тогда, найденные решения ЛОДУ - все общие

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in :$ ФСР $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

**Th. 6.** Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$

$\overline{y}(x) : L\overline{y} = 0$ - общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ - частное решение ЛНДУ

Тогда $y(x) = \overline{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

□ Lab. □

*Met.* ЛДУ$_2$

1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)

ФСР для всех случаев:

1* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

2* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$

3* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \longrightarrow \{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

$\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали: $y(x) = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ - вектора из ФСР, а $y^*$ - частное решение (какое-либо) ЛНДУ

*Nota.* Рассмотрим два метода поиска $y^*$ для ЛДУ$_2$

1* Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части

2* Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1* **СПЧ**

*Ex.* $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} \quad (\heartsuit)$

Наводящие соображения: Заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A\cos bx + B\cos bx$

Имеет смысл искать частные решения $(\heartsuit)$ в виде $y = Ae^{3x}$

$(Ae^3x)'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$9A - 9A + 2A = 2 \Longrightarrow A = 1$, то есть $y^* = e^{3x}$

*Nota.* Если правая часть содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то $y^*$ ищем в виде ПЧ

**Def.** СПЧ: $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

<u>Частные случаи</u>:

1) $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$

2) $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$ - гармоника $\quad (a = 0, n = m = 0)$

3) $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\overline{P}_l \cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx)$, где $a, b$ - коэфф. СПЧ, $l = \max(m, n), \overline{P}_l, \overline{Q}_l$ - многочлены в неопр. коэфф

*Ex. 1.* $\heartsuit \quad y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2\cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$

$y^* = e^{3x}(\overline{P}_{l=0}(x)\cos 0x) = e^{3x} \cdot A$

*Ex. 2.* Однако!

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ (!)

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1\cos 0x + B\sin 0x) \quad k = a \pm ib$

$$\left.\begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*\prime} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*\prime\prime} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \text{ДУ} \longrightarrow \quad \begin{gathered} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A = 1 \\ 0A = 1 \end{gathered}$$ - 🤯

Нельзя найти $A$

Решим ХрУ 😼: $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Внимание! Число $k$, соответствующее СПЧ, равно ХрУ 🐈‍⬛

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

<u>Проблема</u> $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

ХрУ 🐈‍⬛: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \overline{P}_n(x)e^{ax}$
$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax}$
$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:
$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax} + (\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax})p + \overline{P}_n(x)e^{ax}q$
$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2+pa+q)\overline{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$
$\overline{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x) + (a^2+pa+q)\overline{P}_n(x) = P_n(x)$
Заметим, что если $a$ - корень ХрУ , то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2+pa+q=0$ и степень левой части понижается до $n-1$
Если $a$ - корень ХрУ 2-ой кратности, то есть $a^2+pa+q = \left(a+\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2a+p=0$, то степень левой части понижается на 2
Чтобы сделать уравнение для $\overline{P}_n$ решаемым, домножим $y^*$ на $x^r$, где $r$ - число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ $\lambda_i$ (или кратность $\lambda_i$, с которым совпадает $k$)

Метод (окончательно): $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, $\quad \lambda_{1,2}$ - корни ХрУ ,
$k = a \pm ib$
$y^* = x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx), \quad l = \max(m,n)$

Обобщение для ЛДУ$_n$
$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = f(x)$
ХрУ : $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для $\overline{y}$ - общее решение однородного ДУ
1) Всякому $\lambda_i$ - одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$
2) R-корню $\lambda$ кратности $s$ сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$
3) Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1,j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соотвветствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$
4) $\mathbb{C}$-паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности $t$ соответствует набор $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{t-1}e$

*Nota.* количество векторов $y_i$ в ФСР равно порядку $n$ ДУ
СПЧ $y^* = x^r e^{ax}(\dots)$, где $r$ - кратность $\mathbb{R}$-корня или $\mathbb{C}$-пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

*Ex.* Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$
$$\left.\begin{aligned} &y^* = Ax^1e^{2x} \\ &y^{*\prime} = Ae^{2x}2Axe^{2x} \\ &y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \end{aligned}\right\} \to (4-6+2)Axe^{2x} + (4-3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$
$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + xe^{2x}$

2* **Лагранжа**

*Мет.* ЛДУ$_1$: $y' + py = f(x)$

1) ЛОДУ - $y' + py = 0 \to \overline{y} = Cy_0$ - ФСР

2) ЛНДУ - $y(x) = C(x)y_0 \longrightarrow C'(x)y_0 = f(x) \to C(x)$

*Nota.* Введем аналогичный метод для ЛДУ$_2$

1 этап) $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ - корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$

$\overline{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2 этап) Варьируем $C_1$ и $C_2$, но теперь нужны два условия для их определения. Одним является ДУ

*Ex.* $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(X)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$

$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$

Подберем $g, h$: $\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g} e^x + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{h} e^{2x} = e^{3x}$ или $\underbrace{-e^{2x}}_{g} e^x + \underbrace{2e^x}_{g} e^{2x} = e^{3x}$

Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C_2' = 2e^x$

Тогда $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$

*Nota.* Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ

<u>Метод</u> $y'(x) = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$

Требуем $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$

$y''(x) = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' C_2(x)y_2''$

$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' C_2(x)y_2'' + pC_1(x)y_1' + pC_2(x)y_2' + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$

$C_1(x)\underbrace{Ly_1}_{=0} + C_2(x)\underbrace{Ly_2}_{=0} + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

<u>Итак</u>, Система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Крамер}} \begin{matrix} C_1'(x) = \frac{W_1}{W} \\ C_2'(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

*Nota.* Обобщив метод на $n$-ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

? Доказать, что $\overline{y}+y^*$ - общее решение ЛНДУ

**Th.** $Ly=f(x), y=\overline{y}+y^*$ - решение $Ly=f(x)$.
Тогда $\overline{y}+y^*$ - общее решение

□

Правда ли, что найдется единственный набор констант $C_1,\ldots,C_n$, которое удовлетворяет НУ

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \vdots \end{cases}$$

Так как $\overline{y}+y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0=C_1y_{01}+C_2y_{02}+\cdots+C_ny_{0n}+y_0^* \\ y_0'=C_1y_{01}'+\cdots+y_0^{*\prime} \end{cases} \iff \begin{cases} y_0-y_0^*=\sum C_iy_{0i} \\ y_0'-y_0^{*\prime}=\sum C_iy_{0i}' \end{cases} \iff$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \ldots & y_{0n} \\ y_{01}' & y_{02}' & \ldots & y_{0n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{01}^{(n)} & y_{02}^{(n)} & \ldots & y_{0n}^{(n)} \end{pmatrix}}_{\det W\neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0-y_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение $(C_1,\ldots,C_n)$, которое удовлетворяет НУ

□

**Th.** $Ly=f_1(x)+f_2(x)$
Пусть $Ly_1^*=f_1(x)$ и $Ly_2^*=f_2(x)$, тогда $Ly^*=f_1+f_2$, где $y^*=y_1^*+y_2^*$

□

$Ly^*=L(y_1^*+y_2^*)=Ly_1^*+Ly_2^*=f_1(x)+f_2(x)$

□

# 4.6. Системы ДУ

**Def.** Набор функций $y_1,\ldots,y_n$.
Система дифференциальных уравнений, связывающие эти функции, то есть
$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,\ldots y_n,\ldots,y_1^{(n)},\ldots y_n^{(n)})=0 \\ \vdots \end{cases}$ называется системой ДУ

<u>Механический смысл</u>

$\mathbb{R}^n$ - фазовое пространство - пространство состояний системы

$t$ - время, $x_i$ - координаты точки $M$ в $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$$

- СДУ описывает состояние исследуемой системы во времени, причем $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ - скорости

*Nota.* Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

*Nota.* Всякое ДУ$_n$ можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \Longleftrightarrow y = y_1(x), y' = y_2(x, y_1), \ldots$

Можно сделать и обратное - свести СДУ к ДУ$_n$

<u>Метод исключения</u> Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = f(x, y, t) \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Свели СДУ к ДУ$_2$: $\ddot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}g + \dfrac{\partial f}{\partial y}f$

*Nota.* Чтобы свести к ДУ СДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$ нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять $\dfrac{d^{n-1}\dot{x}_1}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

*Ex.* $\begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5(\dot{\ } - y - 3x) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

ХрУ 😼: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \to \overline{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\overline{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t)$

$5x = \dot{\overline{y}} - \overline{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t)$

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t) \end{cases}$$

*Nota.* Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоян. коэфф.) сводится к ЛДУ (с пост. коэфф.)

*Nota.* СДУ из *Ex.* не содержала $t$ в явном виде. Такие СДУ называются автономными

Матричный метод

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$, $\{a_ij\} = A_{(\text{матрица СДУ})}$

Тогда СДУ запишется $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа $A$ и $h_i$ - собственный вектор для $\lambda_i$

Будем искать решение $Y$ в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

*Ex.* $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

$h_1 : \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h_2 : \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$

Задача Коши: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \to C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$

Итак $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$, где $Y_1 = h_i e^{\lambda_i t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных $\mathbb{R}$-чисел нельзя построить базис из $h_i$, а чтобы составить общее решение СДУ, нужно $n$ линейно независимых решений $Y_i$ (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу🧐)

# 4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения:

Возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху - в неустойчивом

**Def.** СДУ$_2$: $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y) \\ \dot{y} = f_2(t,x,y) \end{cases}$ и НУ$_1$: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ и НУ$_2$: $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \underset{\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}}{\forall x, y} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$

*Nota.* Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

*Nota.* Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $\begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix}$

*Ex.* $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)

$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \to C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \to C = \tilde{y} - 1$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ - устойчива🥳

Классификация точек покоя. Будем рассматривать СДУ (автономную)

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \quad \dot{X} = AX \Longrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями (подстановка)

Причем, точка $(0,0)$ - особая, так как СДУ $\to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений $\lambda_{1,2}$:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Тогда решения СДУ будут $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

Подставляем в первое уравнение, из него получаем $y(t) = \dfrac{1}{b}(C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t})$

Введем Н.У. $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

Решение З.К.: $\begin{cases} x(t) = \frac{ax_0+by_0-x_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1-ax_0-by_0}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b}(\frac{ax_0+by_0-x_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1-a)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1-ax_0-by_0}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_2-a)e^{\lambda_2 t}) \end{cases}$

При $t \to +\infty$ $|e^{\lambda_i t}| < 1$ и $\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, то есть $(0,0)$ - устойчивое решение

*Ex. 1.* $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = C_1e^{-t} \\ y = C_2e^{-2t} \end{cases}$ + Н.У. $\Longrightarrow \begin{cases} x = x_0e^{-t} \\ y = y_0e^{-2t} \end{cases}$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ $\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \Longrightarrow y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при $t \to +\infty$ они все стремятся к $(0,0)$ - устойчивому узлу

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

*Ex. 2.* $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0e^{t} \\ y = y_0e^{-2t} \end{cases}$

Фазовый портрет $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y}{x} \Longrightarrow y = \dfrac{C}{x^2}$

Гиперболы при $t \to \infty$ стремятся к точками $(\pm\infty, 0)$ и образуют так называемое седло неустойчивости

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$

*Ex. 3.* $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases}$ - устойчивая

Фазовый портрет: перейдем в ПСК $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi & x_0 = A\cos\varphi_0 \\ y = \rho\sin\varphi & y_0 = A\sin\varphi_0 \end{matrix}$

Тогда $\begin{cases} \rho\cos\varphi = e^{-t} = A\cos(t-\varphi_0) \\ \rho\sin\varphi = e^{-t} = A\sin(t-\varphi_0) \end{cases} \Longrightarrow \rho^2 = A^2e^{-2t} \Longrightarrow \rho = Ae^{-t}$

Выразим $t$ через $\varphi$: $\tan\varphi = \tan(t-\varphi_0)$

Получаем $\rho = Ae^{-(\varphi+\varphi_0+\pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей ($\rho = Ae^{\varphi}$)

3′) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta(\alpha = 0)$

$\begin{cases} x(t) = x_0\cos\beta t + y_0\sin\beta t \\ y(t) = y_0\cos\beta t - x_0\sin\beta t \end{cases}$.

Фазовый портрет - семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

4) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$

Lab.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -0 \end{cases}$

Обобщим. Если хотя бы один $\lambda \neq 0$ и лежит слева от $Im\lambda$, то решение устойчивое

# X. Программа экзамена в 2023/2024

**Линейная алгебра.**

1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

   Скалярное произведение - функция $(x, y)$, обладающая свойствами:

   (a) $(x, y) = (y, x)$

   (b) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

   (c) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$

   (d) $\forall x \in L \ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

   Евклидовым называет такое линейное пространство, на котором определено скалярное произведение

   Неравенство Коши-Буняковского: $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

   Норма - функция $\|x\|$, такая что

   (a) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

   (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$

   (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$ - неравенство треугольника

   Нормированное Евклидово пространство: $E^n$ является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. Инвариантность евклидовых пространств.

   Ортонормированный базис - такой базис, что $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

   Теорема о существовании ортонормированного базиса (доказывается по матиндукции)

   Матрица Грама: Матрицу $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\ldots k}$ называют матрицей Грама

3. Ортогональность вектора подпространству, ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре.

   Задача о перпендикуляре: Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства $E^n$ на подпространство $G$

   Точка $M$ - конец вектора $x$ в пространстве $E^n$. Нужно найти $M_0$ (конец вектора $x_0$, проекции $x$ на $G$)

   **Th.** $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

4. Линейный оператор: определение, основные свойства.

   Линейный оператор - это отображение $V^n \xrightarrow{\mathcal{A}} W^m$

   Свойства:

   1* $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

   2* $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$

   3* $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$

4* $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$

5. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор.

   Обратный оператор: $\mathcal{B} : W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \to W$ если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

   Взаимно-однозначный оператор: $\mathcal{A} : V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \Longrightarrow y_1 \neq y_2$

   Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

6. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

   Матрица оператора: Матрица $A = {a_{ij}}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства $V^n$

   Преобразование к другому базису: $\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e_i'$

   Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e\to e'} A T^{-1}_{e\to e'})$

7. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

   Ядро и образ:

   Ядро оператора - $Ker\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

   Образ оператора - $Im\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

   Теорема о размерностях: $\mathcal{A} : V \to V$, тогда $\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = \dim V$

8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

   Собственное число $\lambda$ - такое, что удовлетворяет вековому уравнению $|A - \lambda I| = 0$

   Кратность корня $\lambda_i$ называется алгебраической кратностью

   Собственный вектор - такой вектор $x$, что $\mathcal{A}x = \lambda x$

   $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

   $\dim U_{\lambda_i}$ - геометрическая кратность числа $\lambda_i$

   Теорема о диагонализации: $\mathcal{A}$ - диаг.-ем $\Longleftrightarrow \exists$ базис из собственных векторов $\Longleftrightarrow$ сумма алгебраических кратностей равна сумме геометрических

9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

   Сопряженный оператор: Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$

   $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

   Свойства:

   1) $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$

   2) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$

   3) $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$

4) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

5) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)

или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

6) $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор ($\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y'$)

Самосопряженный оператор: $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \Longrightarrow$ матрица $A$ симметричная

Свойства:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \lambda:\ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$

Теорема о базисе собственных векторов: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A} : V^n \to V^n$), тогда $\exists e_1, \ldots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

Проектор: Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное $e_i$ (линейная оболочка)

Спектральное разложение: $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$

11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Геометрический смысл ортогонального преобразования.

Ортогональный оператор: $T$ - ортогональный оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть $T$ сохраняет расстояние

Ортогональная матрица: Матрица $A$ называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

Билинейная форма: $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \to \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\mathcal{B}(x, z) + \mu\mathcal{B}(y, z)$

2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\mathcal{B}(x, y) + \mu\mathcal{B}(x, z)$

Матрица: $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - базис $V_n$, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$ - матрица

13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

Квадратичная форма: Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u, v)$, называется форма $\mathcal{B}(u, u)$

14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

Положительно определенный оператор: 1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если $\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma\|x\|^2$

2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если $\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

Критерий Сильвестра: $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - положительно определен $\Longleftrightarrow$

$\forall k = 1..n$ угловые миноры $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

**Дифференциальные уравнения.**

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

   Задача о распаде: Скорость распада радия в текущий момент времени $t$ пропорциональна его наличному количеству $Q$. Требуется найти закон распада радия: $Q = Q(t)$
   если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось $Q_0$
   $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

   Задача о падении тела: Тело массой $m$ брошено вверх с начальной скоростью $v_0$. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

   $y(t) = \displaystyle\int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

   $\boxed{y^*(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}}$ - частный закон при $y(t_0) = 0, y'(t_0) = v_0$

   Определение: Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ $n$-ого порядка $(*)$

   Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

   Задача Коши: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

   Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

2. Уравнение с разделяющимися переменными.

   УРП: $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

   Решение: $\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

3. Однородное уравнение.

   ОУ: $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \text{ где } P(x,y), Q(x,y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - однородное уравнение

   Решение: $Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}$, где $t = \dfrac{y}{x}$

4. Уравнение в полных дифференциалах.

   Уравнение в полных дифференциалах: $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

Решение: $\Phi(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=0$

5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

   ЛДУ: $\boxed{y'+p(x)y=q(x)}$ - ЛДУ$_1$

   Метод Лагранжа: Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим $y_0$), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y=C(x)y_0$

   Решение: $y_0=e^{-\int p(x)dx}, C(x)=\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

   $y=e^{-\int p(x)dx}\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}$

6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

   Теорема существования и единственности: **Th.** Если $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x,y)\in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - огр. в } U(M_0), \end{cases}$ то в $M_0$ $\exists! y(x)$ - решение ДУ

7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

   ДУ высших порядков: 1* Непосредственно интегрирование

   $y^{(n)}=f(x)$

   Решение: $y^{(n-1)}=\displaystyle\int f(x)dx+C_1$

   $y^{(n-2)}=\displaystyle\int(\int f(x)dx+C_1)dx+C_2$

   2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$

   $F(x,y'(x),y''(x))=0$

   Замена $y'(x)=z(x)$, получаем:

   $F(x,z(x),z'(x))=0$ - ДУ$_1$

   3* ДУ$_2$, не содержащие $x$

   $F(y(x),y'(x),y''(x))=0$

   Замена $y'(x)=z(y)\quad y''(x)=\dfrac{dz(y(x))}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx}=z'_y y'=z'z$

8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ): определения, решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

   Определение: $a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(x)}+\dots+a_{n-1}y'(x)+a^n(x)y=f(x)$, где $y=y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ$_n$

   Решение ЛОДУ$_2$: $y''+py'+qy=f(x),\quad p,q\in\mathbb{R}$

   $\forall p,q\in\mathbb{R}\exists$ уравнение: $\quad\lambda^2+p\lambda+q=0$ и $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}\mid\lambda_1+\lambda_2=-p,\lambda_1\lambda_2=q$ - корни

   1 случай: $\lambda_{1.2}\in\mathbb{R},\lambda_1\neq\lambda_2\Longrightarrow y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C^2e^{\lambda_2x}$

9. Решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

   2 случай: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}\Longrightarrow y(x)=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}$

10. Решение ЛОДУ2 с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней

характеристического уравнения.

3 случай: $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$

11. Свойства решений ЛОДУ2: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.
12. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.
13. Свойства решений ЛОДУ2: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ2. Фундаментальная система решений (определение).
14. Свойства решений ЛНДУ2: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.
15. Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.
16. Решение ЛНУ2 с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.
17. Решение ЛНУ2: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).
18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.
19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.
20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения.