Th. $Ly = f(x), y = \overline{y} + y^*$ - решение $Ly = f(x)$.
Тогда $\overline{y} + y^*$ - общее решение
$\square$
Правда ли, что найдется единственный набор констант $C_1, \dots, C_n$, которое удовлетворяет НУ $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \end{cases}$

Так как $\overline{y}+y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \dots + C_n y_{0n} + y^*_0 \\ y'_0 = C_1 y'_{01} + \dots + y^{*\prime}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 - y^*_0 = \sum C_i y_{0i} \\ y'_0 - y^{*\prime}_0 = \sum C_i y'_{0i} \end{cases} \iff$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} \\ y'_{01} & y'_{02} & \dots & y'_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)}_{01} & y^{(n)}_{02} & \dots & y^{(n)}_{0n} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y^*_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$
Таким образом система имеет единое решение $(C_1, \dots, C_n)$, которое удовлетворяет НУ
$\square$

Th. $Ly = f_1(x) + f_2(x)$
Пусть $Ly^*_1 = f_1(x)$ и $Ly^*_2 = f_2(x)$, тогда $Ly^* = f_1 + f_2$, где $y^* = y^*_1 + y^*_2$
$\square$
$Ly^* = L(y^*_1 + y^*_2) = Ly^*_1 + Ly^*_2 = f_1(x) + f_2(x)$
$\square$

4.6. Системы ДУ

Def. Набор функций $y_1, \dots, y_n$.
Система дифференциальных уравнений, связывающие эти функции, то есть
$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \dots y_n, \dots, y^{(n)}_1, \dots y^{(n)}_n) = 0 \\ \vdots \end{cases}$ называется системой ДУ

<u>Механический смысл</u>
$\mathbb{R}^n$ - фазовое пространство - пространство состояний системы
t - время, x_i - координаты точки M в $\mathbb{R}^n$
$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$ - СДУ описывает состояние исследуемой системы во времени, причем $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ - скорости

Nota. Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

Nota. Всякое ДУ$_n$ можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \iff y = y_1(x), y' = y_2(x, y_1), \dots$

Можно сделать и обратное - свести СДУ к ДУ$_n$

<u>Метод исключения</u> Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x,y,t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x,y,t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y} = f(x,y,t) \\ \dot{x} = g(x,y,t) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f \\ \dot{x} = g(x,y,t) \end{cases}$$

Свели СДУ к ДУ$_2$: $\ddot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}g + \dfrac{\partial f}{\partial y}f$

Nota. Чтобы свести к ДУ СДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять $\dfrac{d^{n-1}\dot{x}_1}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

Ex. $\begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5(\dot{} - y - 3x) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

ХрУ 😼: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \to \overline{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\overline{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t)$

$5x = \dot{\overline{y}} - \overline{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t)$

$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t) \end{cases}$

Nota. Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоян. коэфф.) сводится к ЛДУ (с пост. коэфф.)

Nota. СДУ из *Ex.* не содержала t в явном виде. Такие СДУ называются автономными

<u>Матричный метод</u>

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$, $\{a_ij\} = A_{(\text{матрица СДУ})}$

Тогда СДУ запишется $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа A и h_i - собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

Ex. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

$h_1 : \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h_2 : \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$

Задача Коши: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \to C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$

Итак $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{5t} \end{cases}$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$, где $Y_1 = h_i e^{\lambda_i t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных $\mathbb{R}$-чисел нельзя построить базис из h_i, а чтобы составить общее решение СДУ, нужно n линейно независимых решений Y_i (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу🧐)

4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения:

Возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху - в неустойчивом

Def. СДУ$_2$: $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases}$ и НУ$_1$: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ и НУ$_2$: $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \underset{\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}}{\forall x, y} \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$

Nota. Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

Nota. Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $\begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix}$

Ex. $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)

$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \rightarrow C = \tilde{y} - 1$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ - устойчива🥳