Мет. ЛДУ$_2$

1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)

ФСР для всех случаев:

1* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

2* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$

3* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \longrightarrow \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

$\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали: $y(x) = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* - частное решение (какое-либо) ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ$_2$

1* Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части

2* Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1* **СПЧ**

Ex. $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} \quad (\heartsuit)$

Наводящие соображения: Заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A\cos bx + B\cos bx$

Имеет смысл искать частные решения ($\heartsuit$) в виде $y = Ae^{3x}$

$(Ae^3x)'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$9A - 9A + 2A = 2 \Longrightarrow A = 1$, то есть $y^* = e^{3x}$

Nota. Если правая часть содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде ПЧ

Def. СПЧ: $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

<u>Частные случаи:</u>

1) $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$

2) $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$ - гармоника $\quad (a = 0, n = m = 0)$

3) $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\overline{P}_l\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx)$, где a, b - коэфф. СПЧ, $l = \max(m, n), \overline{P}_l, \overline{Q}_l$ - многочлены в неопр. коэфф

Ex. 1. $\heartsuit$ $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2\cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$

$y^* = e^{3x}(\overline{P}_{l=0}(x)\cos 0x) = e^{3x} \cdot A$

Ex. 2. Однако!

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ (!)

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1\cos 0x + B\sin 0x) \quad k = a \pm ib$

$$\left.\begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*\prime} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*\prime\prime} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \text{ДУ} \longrightarrow \quad \begin{gathered} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A = 1 \\ 0A = 1 \end{gathered} \quad - 🤯$$

Нельзя найти A

Решим ХрУ 😼: $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Внимание! Число k, соответствующее СПЧ, равно ХрУ 🐈‍⬛

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Проблема $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

ХрУ 🐈‍⬛: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax} + (\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax})p + \overline{P}_n(x)e^{ax}q$

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x) + (a^2 + pa + q)\overline{P}_n(x) = P_n(x)$

Заметим, что если a - корень ХрУ 🐈‍⬛, то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2 + pa + q = 0$ и степень левой части понижается до $n - 1$

Если a - корень ХрУ 🐈‍⬛2-ой кратности, то есть $a^2 + pa + q = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2a + p = 0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для $\overline{P}_n$ решаемым, домножим y^* на x^r, где r - число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (или кратность λ_i, с которым совпадает k)

Метод (окончательно): $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \quad \lambda_{1,2}$ - корни ХрУ 🐈‍⬛, $k = a \pm ib$

$y^* = x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx), \quad l = \max(m, n)$

Обобщение для ЛДУ$_n$

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$

ХрУ 🐈‍⬛: $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для $\overline{y}$ - общее решение однородного ДУ

1) Всякому λ_i - одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$

2) R-корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$

3) Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1, j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соотвветствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

4) $\mathbb{C}$-паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^t$

Nota. количество векторов y_i в ФСР равно порядку n ДУ

СПЧ $y^* = x^r e^{ax}(\dots)$, где r - кратность $\mathbb{R}$-корня или $\mathbb{C}$-пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

Ex. Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} &y^* = Ax^1e^{2x} \\ &y^{*\prime} = Ae^{2x}2Axe^{2x} \\ &y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \end{aligned}\right\} \to (4 - 6 + 2)Axe^{2x} + (4-3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + xe^{2x}$

2* **Лагранжа**

Мет. ЛДУ$_1$: $y' + py = f(x)$
1) ЛОДУ - $y' + py = 0 \to \overline{y} = Cy_0$ - ФСР
2) ЛНДУ - $y(x) = C(x)y_0 \longrightarrow C'(x)y_0 = f(x) \to C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ$_2$
1 этап) $'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ - корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$
$\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$
2 этап) Варьируем C_1 и C_2, но теперь нужны два условия для их определения. Одним является ДУ

Ex. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$
$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$
$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(X)e^{2x} = C_1e^x + C_2e^{2x} + y^*$
$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1e^x + C_2e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$
Подберем g, h: $\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g}e^x + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{h}e^{2x} = e^{3x}$ или $\underbrace{-e^{2x}}_{g}e^x + \underbrace{2e^x}_{g}e^{2x} = e^{3x}$
Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C_2' = 2e^x$
Тогда $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$

Nota. Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ
<u>Метод</u> $y'(x) = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$
Требуем $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$
$y''(x) = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'C_2(x)y_2''$
$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'C_2(x)y_2'' + pC_1(x)y_1' + pC_2(x)y_2' + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$
$C_1(x)\underbrace{Ly_1}_{=0} + C_2(x)\underbrace{Ly_2}_{=0} + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

<u>Итак</u>, Система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Крамер}} \begin{matrix} C_1'(x) = \frac{W_1}{W} \\ C_2'(x) = \frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

Nota. Обобщив метод на n-ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

? Доказать, что $\overline{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ