

Мет. $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$

Для начала $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ₂

$$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

Рассмотрим три случая для $\lambda_{1,2}$

1) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда, $y(x) = C_2(x)e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C}_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2)e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ - случай вещ. кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \implies C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ - случай комплексно сопряженных корней

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ - решение ЛОДУ

Получим \mathbb{R} -решения:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} (C_1 + C_2) \cos \beta x + e^{\alpha x} i(C_1 - C_2) \sin \beta x$$

$$Rey(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)e^{\alpha x} \cos \beta x}_{u(x)}, \quad Imy(x) = \underbrace{(C_1 - C_2)e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

Так как $y(x)$ - решение ЛОДУ:

$$u'' + iv'' + pu' + ipv' + qu + iqv = 0$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \text{ то есть } z \in \mathbb{C} \text{ и } z = 0$$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ - решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

Nota. Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)

Также еще не решено ЛНДУ₂

4.5.3. Свойства решений ЛДУ₂

Def. $Ly \stackrel{def}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ - лин. дифф. оператор

$$L : E \subset C_{[a;b]}^2 \rightarrow F \subset C_{[a;b]}$$

Nota. Все определения лин. пространства, базиса, лин. независимости, лин. оболочки сохраняются

И ЛДУ₂ записывается как $Ly = 0$ - ЛОДУ₂, $Ly = f(x)$ - ЛНДУ₂

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решение ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$

Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$

□

$$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$$

□

Def. y_1, y_2 - лин. нез. $\iff C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Мет. Для определения лин. независимости в Линале использовали rgA или $\det A$

Введем индикатор лин. независимости

Заметим, что если y_1, y_2 - лин. зав., то y'_1, y'_2 - лин. зав.

Def. $W \stackrel{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$ - определитель Вронского или вронскиан

Th. 2. y_1, y_2 - лин. зав. $\implies W = 0$ на $[a; b]$

□

$$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y'_2 = ky'_1 \end{matrix} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

Th. 3. $x_0 \in [a; b], \exists W(x_0) = W_0$

Тогда $W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$

$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

□

$\exists y_1(x), y_2(x)$ - реш ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y''_1 y_2 + p y'_1 y_2 + q y_1 y_2 = 0 \\ y''_2 y_1 + p y'_2 y_1 + q y_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(y''_1 y_2 - y''_2 y_1) + p(y'_1 y_2 - y'_2 y_1) = 0$$

$$W'(x) + pW(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p dx$$

$$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^x p dx}$$

$$W_0 = C e^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = C$$

$$\text{Тогда } W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx} \iff \begin{cases} W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in [a; b]$$

□

Th. 4. y_1, y_2 - лин. нез. $\implies W(x) \neq 0$ на $[a; b]$

□ Докажем от противного

$$\square \exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b] \iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \forall x \in [a; b]$$

Можно поделить на y_1^2 , так как y_1, y_2 - лин. нез. Тогда $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \implies \frac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \iff y_2 = ky_1$
- лин. зав., противоречие

□

Nota. Общее решение ЛОДУ₂ - это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$ и ему соответствует свой и единственный набор (C_1, C_2)

Th. 5. y_1, y_2 - лин. нез. решения ЛОДУ, тогда $\bar{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ - общее решение ЛОДУ₂

□ Нужно убедиться, что через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит и только одна кривая $\bar{y}(x_0)$

Зададим НУ: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \bar{y}(x_0) = C_1y_{10} + C_2y_{20} \\ \bar{y}'(x_0) = C_1y_{10}' + C_2y_{20}' \end{cases}$ - задача Коши

Знаем, что $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ - решение (просто, не общее)

Тогда в x_0 $\begin{cases} C_1y_{10} + C_2y_{20} = \bar{y}_0 \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' = \bar{y}'_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}'_0 \end{pmatrix}$ - система крамеровского типа

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \iff \exists! (C_1, C_2) \text{ - решение СЛАУ}$$

Таким образом через всякую x_0 проходит одна! кривая $\bar{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$

□

Nota. Вывод: если найдены какие-либо лин. нез. y_1, y_2 , то общее решение ЛОДУ₂ будет $C_1y_1 + C_2y_2 = \bar{y}$

Def. Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ₂

Nota. Тогда, найденные решения ЛОДУ - все общие

- 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
- 3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$: ФСР $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$

$\bar{y}(x) : L\bar{y} = 0$ - общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ - частное решение ЛНДУ

Тогда $y(x) = \bar{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

□ Lab. □