Мет. $y' + p(x)y = q(x)$

1) $y' + p(x)y = 0$

$\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$

$y_0 = e^{-\int p(x)dx}$

$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$ - общее решение ЛОДУ

2) $y' + p(x)y = q(x)$

$y(x) = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C(x)(y_0' + p(x)y_0) = 0$ - так как y_0 - решение ЛОДУ

$C'(x) = \dfrac{q(x)}{y_0}$

$C(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$

Окончательно, $y(x) = \left(\left(\displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)dx\right)e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int pdx} + e^{-\int pdx}\displaystyle\int qe^{\int pdx} = \overline{y} + y^*$

4.3. Существование и единственность решения

Мет. $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ **Th.** Если $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x,y) \in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - огр. в } U(M_0), \end{cases}$ то в M_0 $\exists! y(x)$ - решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если $\forall$ его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

Def. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область D
Соответственно точки D могут быть особыми или обыкновенными (выпол. усл. **Th.**)

Условия особого решения $P(x,y)$ или $Q(x,y) = 0$

Ex. 1. $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \longrightarrow \sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$

Обычное решение:
$\arcsin y = x + C$
$y = \sin(x+C)$

Особое решение:
$p = \sqrt{1-y^2} = 0$
$1 - y^2 = 0 \to y = \pm 1$

Ex. 2. $\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$

$y^{\frac{1}{3}} = x + C$
$y = (x+C)^3$

$dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$
$P = 0 \Longrightarrow y = 0$

4.4. ДУ высших порядков

Nota. Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1* Непосредственно интегрирование

$y^{(n)} = f(x)$

Решение: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$

Ex. См. Задачу 2 в начале

2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$

$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:

$F(x, z(x), z'(x)) = 0$ - ДУ$_1$

Ex. $(1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$

$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$

$z' + \dfrac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \Longleftrightarrow z' = -\dfrac{1+z^2}{1+x^2} \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{1+z^2} = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

$\arctan x = \arctan(-x) + C$

$z = \dfrac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C} = y'$

$y = \displaystyle\int \frac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C}dx = \ldots$

3* ДУ$_2$, не содержащие x

$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \dfrac{dz(y(x))}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$

ДУ: $F(y, z(y), z'(y)) = 0$

Ex. $y'' + y'^2 = yy'$

$y' = z(y) \quad y'' = z'z$

$z'z + z^2 = yz \quad | \ : z \neq 0 \qquad z = 0 \Longrightarrow y = const$

$z' + z = y$ - ЛДУ

1) $z' + z = 0$

$\ln|z| = -y + C$

$z = Ce^{-y}$

2) $C'(y)e^{-y} = y$

$C'(y) = ye^y$

$C(y) = \displaystyle\int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$

$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1e^{-y}}_{\bar{z}}$

$y' = C_1e^{-y} + y - 1 \Longrightarrow ? \ldots$

4.5. ЛДУ$_2$

4.5.1. Определения

Def. $a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(x)}+\dots+a_{n-1}y'(x)+a^n(x)y=f(x)$, где $y=y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ$_n$

Nota. Если $n=2$ - ЛДУ$_2$, $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y=f(x)$ - разрешенное относительно старших производных ЛДУ$_2$

Nota. Если $a_i(x)=a_i\in\mathbb{R}$ - ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами

4.5.2. Решение ЛДУ$_2$ с постоянными коэффициентами

$y''+py'+qy=f(x),\quad p,q\in\mathbb{R}$
$\forall p,q\in\mathbb{R}\exists$ уравнение: $\quad\lambda^2+p\lambda+q=0$ и $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}\mid\lambda_1+\lambda_2=-p,\lambda_1\lambda_2=q$ - корни
Назовем уравнение характеристическим (ХрУ)

Nota. $\lambda_{1,2}$ могут быть только
1) вещественными различными;
2) вещественными одинаковыми ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ - корень 2-ой кратности);
3) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta\in\mathbb{C}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
Запишем ЛДУ$_2$ через $\lambda_{1,2}$:
$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=f(x)$
$y''-\lambda_1y'-\lambda_2y'+\lambda_1\lambda_2y=f(x)$
$(y'-\lambda_2y)'-\lambda_1(y'-\lambda_2y)=f(x)$
Обозначим $u(x)=y'-\lambda_2y$
Тогда ДУ: $\begin{cases}y'-\lambda_2y=u(x)\\u'-\lambda_1u=f(x)\end{cases}$
Решим: $u'-\lambda_1u=f(x)$

1) $u'-\lambda_1u=0$
$\dfrac{du}{u}=\lambda_1dx$
$\overline{u}=C_1e^{\lambda_1x}$

2) $u'-\lambda_1u=f(x)$
$u(x)=C_1(x)e^{\lambda_1x}$
Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ$_2$ ($f(x)=0$)
Эта система $\begin{cases}y'-\lambda_2yu(x)\\u'-\lambda_1u=0\end{cases}\iff\begin{cases}y'-\lambda_2yu(x)\\u=C_1e^{\lambda_1x}\end{cases}$

Решим $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$:

1) $y' - \lambda_2 y = 0$

$\overline{y} = C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x}$

$C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 = \lambda_2} x$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$