Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы
Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется
Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u,v)$, называется форма $\mathcal{B}(u,u)$

Ex. Поверхность
$u=(x,y), v=(x,y,z)$
$\mathcal{B}(u,u)=b_{11}u_1u_1+b_{12}u_1u_2+b_{21}u_2u_1+b_{22}u_2u_2=b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{21}xy+b_{22}y^2$
$\mathcal{B}(v,v)=\beta_{11}x^2+\beta_{12}xy+\beta_{13}xz+\beta_{21}xy+\beta_{22}y^2+\beta_{23}yz+\beta_{31}xz+\beta_{32}yz+\beta_{33}z^2$

Mem. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{13}xz+a_{33}z^2=c$$

Nota. Заметим, что здесь коэфф. a_{ij} соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:
$B(v,v)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$
Если диагонализировать $B(v,v)$, то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:
$\mathcal{B}(v,v)_{\text{канон.}}=c_{11}x^2+c_{22}y^2+c_{33}z^2$
Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A}:V^n\to V^n$
1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если
$\exists\gamma>0 \mid \forall x\in V \quad (\mathcal{A}x,x)\geq\gamma\|x\|^2$
2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если
$\forall x\in V,\ x\neq 0 \quad (\mathcal{A}x,x)>0$

Th. 1), 2) $\Longleftrightarrow \forall\lambda_i$ - с. число $\mathcal{A}$, $\lambda_i>0$
$\square \Longrightarrow \quad \lambda_i$ - с. число, e_i - соответствующий им с. вектора

$\forall x \in V \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\Longleftarrow \quad 1) \Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \ \forall i$

□

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра

$\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - положительно определен $\Longleftrightarrow \forall k = 1..n \ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

□ $\Longrightarrow \quad \mathcal{A}$ - пол. опред.

$\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \leq n$

$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \overset{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$

$\Longleftarrow$ ММИ

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$

1) Для $k = 1 \quad \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}_{n-1}$ - пол. опр. $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ - пол. опр.

1) $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}$ диагон. $\quad \mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \quad$ Для $i \leq n-1$ все $\lambda_i > 0$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i e_i) = \overbrace{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2$ - знак зависит от λ_n

$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \Longrightarrow \lambda_n > 0 \Longrightarrow (\mathcal{A}x, x) > 0$

□

Ex. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \ \forall k$

Положительная определенность - наличие экстремума

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

Nota. Для $-\mathcal{A}$ работает критерий Сильвестра: $\Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$

Таким образом, $\mathcal{A}$ - отриц. опред. $\Longleftrightarrow \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы
$\mathcal{B}(u,v) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots$ через оператор
Так как $\mathcal{B}(u,v)$ и $\mathcal{B}(u,u)$ - числа, то $\mathcal{B}$ - называется пол. опред., если $\mathcal{B}(u,v) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u,v)$ к каноническому виду, получаем
$\mathcal{B}(u,u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$
В общем случае λ_i любого знака
Но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)