Th. Во всяком E^n можно выделить ортонормированный базис

□

В $E^n_{\|\cdot\|}$ $\exists B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ - базис

? Можно ли выделить $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - ортонормированный базис?

Метод мат. индукции:

База: построим один ортогональный вектор для $\beta_1 = e_1'$ (потом $e_1 = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|}$)

Рассмотрим $e_2' = \beta_1 - \lambda e_1'$. Требуем $e_2' \perp e_1'$, то есть $(e_1', e_2') = 0$

Отсюда найдем нужный $\lambda : (e_1', e_2') = (e_1', \beta_2 - \lambda e_1') = (e_1', \beta_2) - \lambda(e_1', e_1') = 0$

Тогда $\lambda = \dfrac{(e_1', \beta_2)}{(e_1', e_1')}$

Переход: Пусть построена система ортогональных векторов $\{e_1', e_2', \dots, e_k'\}$

Построим $k+1$ систему:

Рассмотрим $e_{k+1}' = \beta_{k+1} - \lambda_k e_k' - \lambda_{k-1}' e_{k-1}' - \dots - \lambda_1 e_1' \quad (*)$

Требуем $e_{k+1}' \perp e_i \quad \forall i \in [1; k]$

$(e_{k+1}', e_k') = (\beta_{k+1}, e_k') - \lambda_k(e_k', e_k') = 0$, так как $(e_i', e_j') = 0 \quad i \neq j$

$\lambda_k = \dfrac{(\beta_{k+1}, e_k')}{(e_k', e_k')}$

Аналогично: $(e_{k+1}', e_{k-1}') = (\beta_{k+1}, e_{k-1}') - \lambda_{k-1}(e_{k-1}', e_{k-1}')$

$\lambda_{k-1} = \dfrac{(\beta_{k+1}, e_{k-1}')}{(e_{k-1}', e_{k-1}')}$

□

Изложенный метод называется методом ортогонализации базиса, при этом $(*)$ определяет ненулевой вектор, иначе получим нулевую тривиальную линейную комбинацию векторов β_i (e_i выражается через них), но это невозможно, так как вектора базисные.

Полученную систему стоит нормировать

Ex. Формула скалярного произведения в о/н базисе

$E_{\|\cdot\|}, B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ - какой-либо базис

Рассмотрим $x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$ и $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

Найдем (x, y), как произведение компонент: $(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j (\beta_i, \beta_j)$

Обозначим $(\beta_i, \beta_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$

Таким образом, $(x, y) = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} x_i y_j$ - дальше назовем квадратичной формой

Ранее (в аналитической геометрии) $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ - произведение координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в ДПСК (с о/н базисом)

Действительно: если $\beta_i = e_i,\ \beta_j = e_j,\ e_{ij} \in$ о/н базису

$$a_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{array}\right.$$

Таким образом, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i$

Причем $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Longrightarrow x_i = (x, e_i)$

Ex. Система функций, непрерывных на $[0, 2\pi]$

$\Phi = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$

Система ортогональна (Lab.), но не нормированная (Lab.)

$\Phi_{\|\cdot\|} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \dots\}$ - нормированная система

Тогда функция, определенная и непрерывная на $[0, 2\pi]$ может быть разложена по базису $\Phi_{\|\cdot\|}$ и ее координат (как вектора): $f_i = \int_0^{2\pi} f \cdot e_i dx$, где $e_i \in \Phi_{\|\cdot\|}$