Содержание

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поисков закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

1. Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз

Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \dfrac{n_A}{n}$ при $n \to \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ex. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, $A = \{\text{Г}\}$ - выпал герб

Ex. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ex. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{РГ}, \text{ГР}\}$

а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{ГР}\}$

Ex. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j\rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность} \,\vdots\, 3\} = \{\langle 1, 4\rangle; \langle 4, 1\rangle; \langle 2, 5\rangle; \langle 5, 2\rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle$ - центр монеты$\}$ - несчетное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

$\varnothing$ - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A+B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или событие B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло

Nota. $\overline{\overline{A}} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \overline{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

Def. 6. События A влечет события B, если $A \subset B$ (если наступает A, то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \le P(A) \le 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $\boxed{P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$

Свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(A) = 1 \quad (m = n)$

3) $P(\varnothing) = 0 \quad (m = 0)$

4) Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в $\mathbb{R}^n$ (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Ex. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$

$\mu(A) = (20-3-3)^2 = 196$

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{196}{400} = 0.49$

Ex. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\sqsupset x \in [0;1]$ - расстояние от центра до ближайшего края, $\varphi \in [0;\pi]$ - угол

$\Omega = [0;1] \times [0;\pi]$

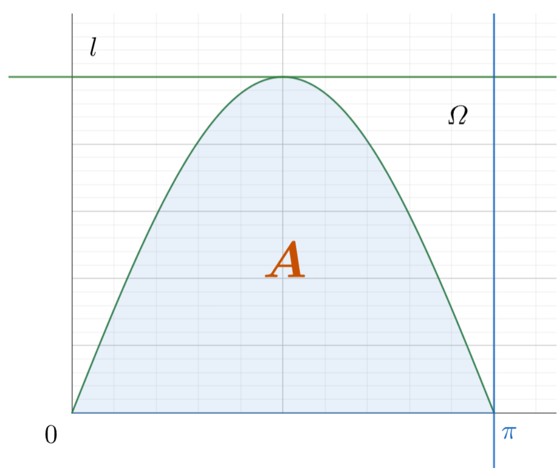
Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \le l \sin\varphi$

$P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

$S(\Omega) = \pi l$

$S(A) = \int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = -l(-1-1) = 2l$

$P(A) = \dfrac{2l}{\pi l} = \dfrac{2}{\pi}$



Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω

2. **Def.** Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй событий, если:
   1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
   2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;
   3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Свойства:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$
   (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   □ $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ □

   (c) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

   □ $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathcal{F}$ □

   Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$
   Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$
   Ex. 3. **Def.** Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ-алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.** $\sqsupset$ Ω - пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ - его σ-алгебра событий. *Вероятностью* на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:
   (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
   (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
   (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как $\varnothing$ и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing) = 1 + P(\varnothing) \Longrightarrow P(\varnothing) = 0$
2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   □ A и $\overline{A}$ - несовместные и $A + \overline{A} = \Omega \Longrightarrow P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ □

3. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n = \varnothing$

Тогда $P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменятся непрерывно

Th. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

□

Ясно, что $A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_i\overline{A}_{i+1} + \prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i$

$\prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{n} \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{\infty} = \varnothing \Longrightarrow A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_n\overline{A_{n+1}}$ и так как эти события несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum\limits_{i=n}^{\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}})$ - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$P(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} P(A_i\overline{A_{i+1}}) + P(A_n)$ и $P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по необходимому признаку сходимости

□

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) = (P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

Ex. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(\text{Д}+\text{П}) = P(\text{Д}) + P(\text{П}) - P(\text{ДП}) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при $N = 3$: $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2\dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ex. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\sqsupset A_i$ - i-ое письмо в своем конверте

$P(A_i) = \dfrac{1}{n}; P(A_iA_j) = \dfrac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \dfrac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2\dots A_n) = \dfrac{1}{n!}$

Слагаемых вида A_i - n штук; A_iA_j - C_n^2; $A_iA_jA_k$ - C_n^3; $A_1A_2\dots A_n$ - 1 штука

$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \dfrac{1}{n} - C_n^2 \dfrac{1}{A_n^2} + C_n^3 \dfrac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n!}$

Так как $e^{-1} = 1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3!} + \dots$, то при $n \to \infty$ $\quad P(A) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$\sqsupset |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega \times \Omega$ и $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$P(AB) = \dfrac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \dfrac{m_1m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab. $\sqsupset P(A), P(B) \neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Longrightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}) \Longrightarrow$ независимы

Def. События $A_1, A_2, \dots A_n$ - независимы в совокупности, если для любого набора $i_1, i_2, \dots, i_k$ $(2 \le k \le n)$ $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр, $\sqsupset A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Так как $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$

$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$ - попарная независимость

$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$ - но вот независимость в совокупности не соблюдается

Ex. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, $\approx$ 1650 г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом

B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность: $\overline{B}$ - ни разу не выпала шестерка

$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$

$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$

$\overline{B} = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0.52$