# Лекция 10

## Преобразование случайных величин

### Стандартизация случайной величины

**Def.** Пусть имеется случайная величина $\xi$. Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина $\eta = \dfrac{\xi - E\xi}{\sigma}$

**Свойства**:

$E\eta = 0; D\eta = 1$

$$E\eta = E\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(E\xi - E\xi) = 0$$
$$D\eta = D\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi = 1$$

Стандартизованная случайная величина не имеет единиц измерения, таким образом, ее свойства от них не зависят

Задача: пусть имеется функция $g(x)$ и случайная величина $\xi$, $\eta = g(\xi)$. Определить ее характеристики

*Nota.* Если $\xi$ - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения $x_i$ в верхней строке заменяем $g(x_i)$, вероятности остаются прежние. Поэтому будем рассматривать непрерывной случайной величины $\xi$

*Nota.* Возможна ситуация, когда $\xi$ - абсолютно непрерывная случайная величина, $g(x)$ - непрерывна, но $g(\xi)$ имеет дискретное распределение

### Линейное преобразование

**Th.** Пусть $\xi$ имеет плотность $f_\xi(x)$, тогда $\eta = a\xi + b$, где $a \neq 0$, имеет плотность $f_\eta(x) = \dfrac{1}{|a|}f_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

Пусть $a > 0$, тогда $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \dfrac{x-b}{a}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt =$ $\begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty & y(\frac{x-b}{a}) = x & \end{bmatrix} = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_\xi(\frac{y-b}{a})dy \Longrightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi(\frac{x-b}{a})$

Пусть $a<0$, тогда $F_\eta(x)=p(\eta<x)=p(a\xi+b<x)=p(\xi>\frac{x-b}{a})=\int_{\frac{x-b}{a}}^{\infty}f_\xi(t)dt=$ $\begin{bmatrix} t=\frac{y-b}{a} & dt=\frac{1}{a}dy & y=at+b \\ y(\infty)=-\infty & y(\frac{x-b}{a})=x & \end{bmatrix}=-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{a}f_\xi(\frac{y-b}{a})dy\Longrightarrow f_\eta(x)=\frac{1}{|a|}f_\xi(\frac{x-b}{a})$

<u>Следствие</u>

1) Если $\xi\in N(a,\sigma^2)$, то $\eta=\gamma\xi+b\in N(a\gamma+b;\gamma^2\sigma^2)$

Так как $\xi\in N(a,\sigma^2)$, то $f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}, x\in\mathbb{R}$

Тогда $f_\eta(x)=\frac{1}{|\gamma|}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{x-b}{\gamma}-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{|\gamma|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-b-a\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma^2}}\Longrightarrow\eta\in N(b+a\gamma;\sigma^2\gamma^2)$

2) Если $\eta\in N(0,1)$ - стандартное нормальное распределение, то $\xi=\sigma\eta+a\in N(a,\sigma^2)$

3) Если $\eta\in U(0,1)$ - стандартное равномерное распределение и $a>0$, то $\xi=a\eta+b\in U(b,a+b)$

4) Если $\xi\in E_\alpha$, то $\alpha\xi\in E_1$

### Монотонное преобразование

**Th.** Пусть $f_\xi(x)$ - плотность случайной величины $\xi$, $g(x)$ - строго монотонная функция. Тогда случайная величина $\eta=g(\xi)$ имеет плотность

$$f_\eta(x)=|h'(x)|f_\xi(h(x)),\qquad\text{где } h(g(x))=x$$

Если $g(x)$ не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем $g(x)$ на интервалы монотонности, для каждого $i$-ого интервала находим $h_i(x)$ и плотность случайной величины ищем по *формуле Смирнова*: $f_\eta(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}|h_i'(x)|f_\xi(h_i(x))$

### Квантильное преобразование

**Th. 1.** Пусть функция распределения случайной величины $\xi$ $F_\xi(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\eta=F(\xi)\in U(0,1)$ - стандартное равномерное распределение

Ясно, что $0\le\eta\le1$

а) $F(x)$ - строго возрастающая функция. Тогда $\exists F^{-1}(x)$ - обратная, $F_\eta(x)=p(\eta<x)=$

$$p(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, & 0 \le x \le 1 \text{ - функция распределения } U(0,1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

б) $F(x)$ - не является строго возрастающей функцией - то есть существуют участки постоянства, в этом случае определим $F^{-1}$ как $F^{-1}(x) = \min\limits_t (t \mid F(t) = x)$ - то есть берем самую левую точку такого интервала

Тогда снова будет при $0 \le x \le 1$ $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(F(\xi) < x) = F(F^{-1}(x)) = x$

Сформулируем обратную теорему: пусть $F(x)$ - функция распределения (необязательно непрерывная) случайной величины $\xi$, обозначим $F^{-1}(x) = \inf\limits_t (t \mid F(t) \ge x)$.

В случае непрерывной $F(x)$ это определение совпадет с предыдущем

**Th. 2.** Пусть $\eta \in U(0,1)$ - стандартное равномерное распределение, $F(x)$ - произвольная функция распределения. Тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Данное преобразование $\xi = F^{-1}(\eta)$ называют квантильным

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужно распределение

*Ex. 1.* Смоделируем показательное распределение $E_\alpha$ : $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \ge 0 \end{cases}$

$\eta = 1 - e^{-\alpha x}$, $e^{-\alpha x} = 1 - \eta$, $x = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-\eta)$ - функция, обратная к $F_\alpha(x)$

Если $\eta \in U(0,1)$, то $\xi = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-\eta) \in E_\alpha$

*Ex. 2.* $\xi \in N(0,1)$, $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

Пусть $F_0^{-1}(x)$ - функция обратная к $F_0(x)$

Если $\eta \in U(0,1)$, то $F_0^{-1}(\eta) \in N(0,1)$

## Характеристики преобразованной случайной величины

**Th.** Если $\xi$ - дискретная случайная величина, то $Eg(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx$

### Свойства моментов

1) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$
2) Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

$\xi \leq \eta \Longrightarrow \eta - \xi \geq 0 \Longrightarrow E(\eta - \xi) \geq 0 \Longrightarrow E\eta - E\xi \geq 0 \Longrightarrow E\eta \geq E\xi$

3) Если $|\xi| \leq |\eta|$, то $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$
4) Если существует момент $m_t$ случайной величины $\xi$, то существует $m_s$ при $s < t$ (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

Пусть $s < t$. Тогда $|x|^s \leq \max(1, |x|^t) \leq 1 + |x|^t$, так как при $|x| < 1$, $|x|^s \leq 1$ и при $|x| \geq 1$, $|x|^s \leq |x|^t$
$E|\xi|^s \leq E|\xi|^t + 1$ и если $E|\xi|^t$ существует (конечно), то $\exists E|\xi|^s$

**Th. Неравенство Йенсена.** Пусть функция $g(x)$ выпукла вниз, тогда для любой случайной величины $\xi$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

*Nota.* Если $g(x)$ выпукла вверх, знак неравенства меняется

Если $g(x)$ выпукла вниз, то в любой ее точке, можно провести прямую, лежащую не выше графика функции. То есть для любой $x_0$ существует $k(x_0)$ такой, что $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$
Пусть $x_0 = E\xi$, $g(E\xi) \geq g(E\xi) + k(E\xi)(x - E\xi)$
$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + k(E\xi)(\underbrace{E\xi - E\xi}_{=0})$
$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

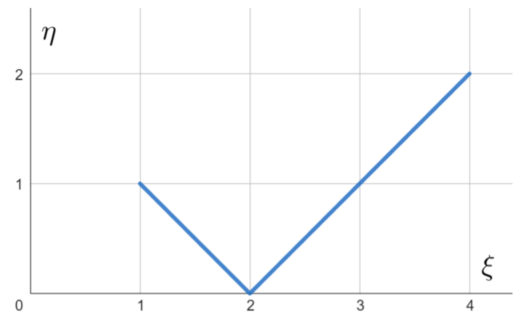
Следствие:

$$Ee^{\xi} \geq e^{E\xi}, \quad E\xi^2 \geq (E\xi)^2, \quad E|\xi| \geq |E\xi|, \quad E\ln(\xi) \leq \ln(E\xi), \quad E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi} \text{ при } \xi > 0$$

*Ex.* на формулу Смирнова: дана плотность распределения

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2}, & 1 \leq x \leq 4, 0 \\ x > 4 \end{cases}$$

Найти $f_{\eta}$ для $\eta = |\xi - 2|$




Решение

$\xi \in [1, 4], \quad \eta \in [0, 2]$

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \Longrightarrow h_1(\eta) = \eta + 2 \text{ и } h_2(\eta) = 2 - \eta & \text{- 2 ветви} \\ 1 < \eta \leq 2 \Longrightarrow h_1(\eta) = \eta + 2 & \text{- 1 ветвь} \end{cases}$$

$h_1'(\eta) = 1, h_2'(\eta) = -1 \qquad |h_1'(\eta)| = |h_2'(\eta)| = 1$

$$f_{\eta}(x) = \sum_i |h_i'(x)| f_{\xi}(h_i(x))$$

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3}\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(2-x)^2}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{3}\frac{1}{(x+2)^2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$