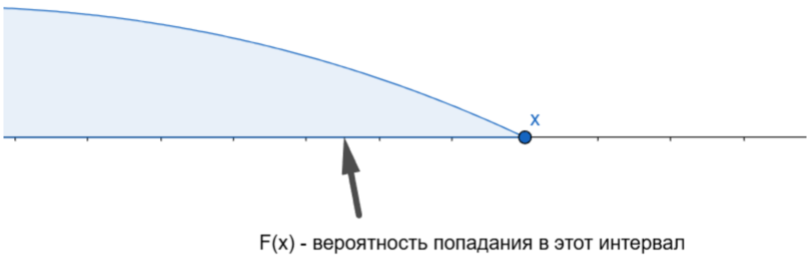
Лекция 8

Функция распределения

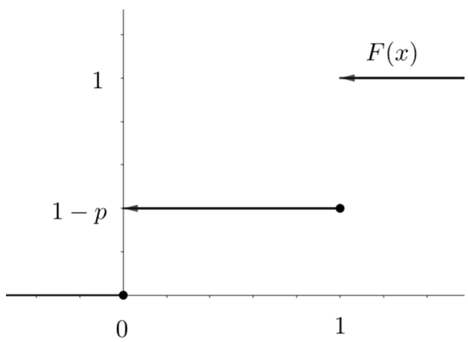
Def. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$



Ex. $\xi \in B_p$

ξ	0	1
p	$1-p$	p

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1-p & 0 < x \le 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Свойства функции распределения

1) $F(x)$ ограничена $0 \le F(x) \le 1$
2) $F(x)$ неубывающая функция: $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

> $x_1 < x_2 \Longrightarrow \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \Longrightarrow p(\xi < x_1) \le p(\xi < x_2)$, то есть $F(x_1) \le F(x_2)$

3) $p(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

> $p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \le \xi < \beta) \Longrightarrow F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \le \xi < \beta)$

Nota. Функция распределения $F(x)$ - вероятность попадания в интервал $(-\infty; x)$. Так как Борелевская σ-алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

> Так как $F(x)$ монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности $x_n \to \pm\infty$

$\sqsupset A_n = \{n-1 \le \xi < n, n \in \mathbb{Z}\}$ - несовместные события, так как $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, то по аксиоме счетной аддитивности, вероятность $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} p(n-1 \le \xi < n) =$
$\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} (F(n) - F(n-1)) = \lim\limits_{N\to\infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim\limits_{N\to\infty} F(N) - \lim\limits_{N\to-\infty} F(N) = 1$
$\implies \lim\limits_{N\to\infty} F(N) = 1 + \lim\limits_{N\to-\infty} F(N)$
Так как $\lim\limits_{N\to\infty} F(N) \le 1$ и $\lim\limits_{N\to-\infty} F(N) \ge 0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} F(N) = 1$ и $\lim\limits_{N\to-\infty} = 0$

5) $F(x)$ непрерывна слева: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$
Так как $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$
То по аксиоме непрерывности $p(B_n) \longrightarrow 0$
$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \longrightarrow 0$
$F(x_0 - \frac{1}{n}) \longrightarrow F(x_0)$
$\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$

6) Скачок в точке x_0 равен вероятности попадания в данную точку: $F(x_0+0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$ или $F(x_0+0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \le x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $C_n = \{x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$
Так как $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$
То по аксиоме непрерывности $p(C_n) \longrightarrow 0$
$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \longrightarrow 0$
$p(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \longrightarrow p(\xi = x_0)$
$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \longrightarrow p(\xi = x_0)$
$F(x_0 + 0) - F(x_0) \longrightarrow p(\xi = x_0)$

7) Если функция распределения непрерывна в точке $x = x_0$, то очевидно, что вероятность попадания в эту точка $p(\xi = x_0) = 0$ (следствие из 6 пункта)
8) Если $F(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$, то $p(\alpha \le \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \le \xi \le \beta) = p(\alpha < \xi \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

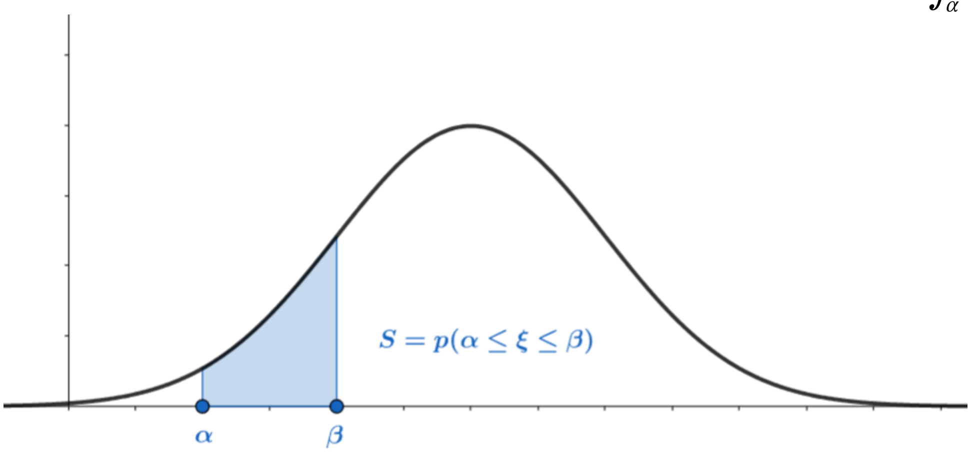
Th. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

Абсолютно непрерывное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует $f_\xi(x)$ такая, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)dx$
Функция f_ξ называется плотностью распределения случайной величины
(в определении использует интеграл Лебега, так как B может быть не просто интервалом на $\mathbb{R}$)

Свойства плотности абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятносто-геометрический смысл плотности: $p(\alpha \le \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$



2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

Из определения, если $B = \mathbb{R}$

3) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx$

Если $B = (-\infty; x)$, то $F_\xi(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx$

4) $F_\xi(x)$ непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

5) $F_\xi(x)$ дифференцируема почти везде и $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ для почти всех x

По теореме Барроу

6) $f_\xi(x) \geq 0$ по определению и как производная неубывающей $F_\xi(x)$
7) $p(\xi = x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ - так как $F_\xi(x)$ непрерывна
8) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
9) **Th.** Если $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (выполнены свойства 2 и 6), то $f(x)$ - плотность некоторого распределения

Числовые характеристики

Def. Математическим ожиданием $E\xi$ случайной абсолютно непрерывной величины ξ называется величина $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx < \infty$

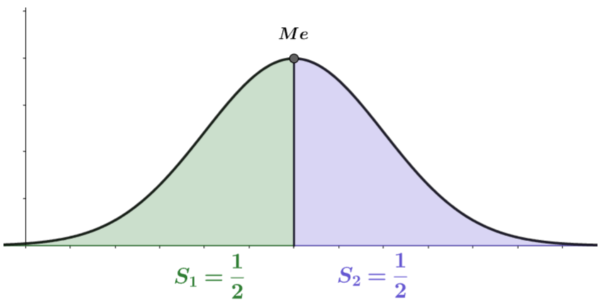
Def. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется величина $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E\xi)^2 f_\xi(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится
Nota. Вычислять удобно по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (E\xi)^2$

Def. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ определяется, как корень дисперсии
Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

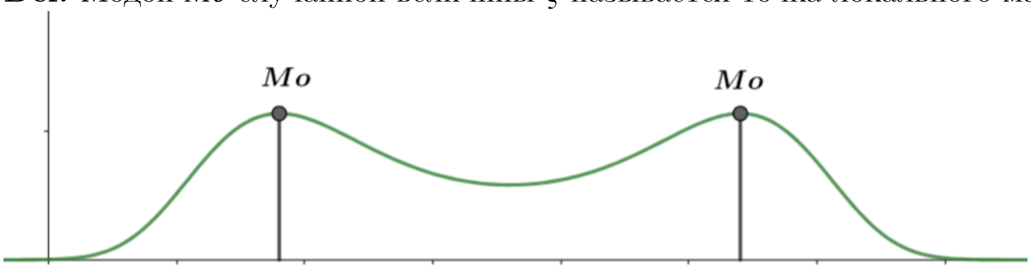
Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx$ - момент k-ого порядка
$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_\xi(x)dx$ - центральный момент k-ого порядка

Def. Медианой Me абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется значение случайной величины ξ, такое что $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$



Def. Модой *Mo* случайной величины ξ называется точка локального максимума плотности



Сингулярное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет сингулярное распределение, если $\exists B$ - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега $\lambda(B) = 0$, такое что $p(\xi \in B) \in 1$, но $P(\xi = x) = 0 \;\; \forall x \in B$

Nota. Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности $p(\xi \in B) = 0$. То есть при сингулярном распределении случайная величина ξ распределена на несчетном множестве меры 0

Nota. Так как $p(\xi = x) = 0 \; \forall x$, F_ξ непрерывна.

Ex. Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой - лестница Кантора

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) \quad 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2) \quad \frac{2}{3} < x \le 1, \\ 1 \quad x > 1 \end{cases}$$

Th. Лебега.

$\urcorner F_\xi(x)$ - функция распределения ξ. Тогда $F_\xi(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

F_1 - функция дискретного распределения

F_2 - функция абсолютно непрерывного распределения

F_3 - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси