

## Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов  $\Omega$
2. **Def.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй событий, если:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- 2)  $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- 3)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Свойства:**

(a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , так как  $\Omega \in \mathcal{F} \implies \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$

(b)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \implies \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

(c)  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \implies A, \bar{B} \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

*Ex. 1.*  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

*Ex. 2.*  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

*Ex. 3.* **Def.** Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  - минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.**  $\square \Omega$  - пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  - его  $\sigma$ -алгебра событий. *Вероятностью* на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется функция  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

(a)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$  (неотрицательность)

(b) Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  - несовместное, то  $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (свойство счетной аддитивности)

(c)  $P(\Omega) = 1$  (условие нормированности)

**Def.** Из тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется вероятностным пространством

## Свойства вероятности

1. Так как  $\emptyset$  и  $\Omega$  - несовместные, то  $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$
2. Формула обратной вероятности:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

□  $A$  и  $\bar{A}$  - несовместные и  $A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$  □

$$3. P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$$

### Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области  $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  соответствующая вероятность  $P(A)$  также должна изменяться непрерывно

**Th.** Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

□

Ясно, что  $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$

$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1}$  и так как эти события

несовместны, то по свойству счетной аддитивности  $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$  - это остаток

(хвост) сходящегося ряда

$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n)$  и  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  по необходимому признаку сходимости

□

*Nota.* Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

### Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности:  $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$A + B = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}B$  - несовместные события  $\implies P(A + B) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = (P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

Ех. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

$$\text{Пусть Д - дама, П - пика, } P(\text{Д} + \text{П}) = P(\text{Д}) + P(\text{П}) - P(\text{ДП}) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

Формула сложения при  $N = 3$ :  $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай:  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$  - формула включения и исключения

Ех.  $n$  писем случайно раскладывается по  $n$  конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\square A_i$  -  $i$ -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида  $A_i$  -  $n$  штук;  $A_iA_j$  -  $C_n^2$ ;  $A_iA_jA_k$  -  $C_n^3$ ;  $A_1A_2 \dots A_n$  - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как  $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$ , то при  $n \rightarrow \infty$   $P(A) \rightarrow 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов  $\Omega \times \Omega$  и  $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики  $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

**Def.** События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab.  $\square P(A), P(B) \neq 0$ , доказать, что если  $A$  и  $B$  несовместны, то они зависимы

Свойство: Если  $A$  и  $B$  независимы, то независимы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ,  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$

Доказательство:  $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$  - несовместные события  $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$  независимы

**Def.** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - независимы в совокупности, если для любого набора  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $2 \leq k \leq n$ )  $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

*Nota.* Из независимости в совокупности при  $k = 2$  получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр,  $\Delta A$  - грань, которая содержит красный цвет,  $B$  - синий,  $C$  - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

Ex. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма,  $\approx 1650$  г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

$A_1$  - при первом броске шестерка,  $A_2$  - при втором,  $A_3$  - при третьем,  $A_4$  - при четвертом

$B$  - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность:  $\bar{B}$  - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$