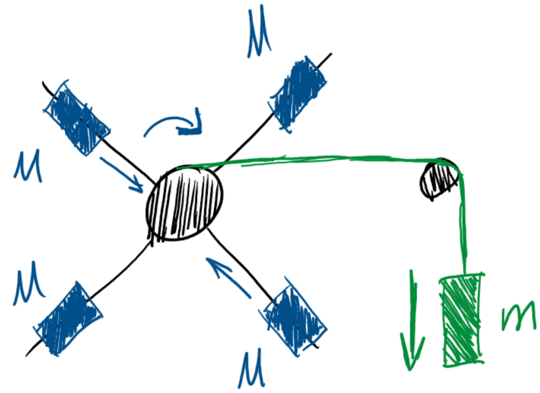
5. Вращательное движение. Моменты силы и импульса

Одной из лабораторный работ в курсе механики является работа с маятником Обербека (представлен на рисунке). Принцип его работы таков: к вращающемуся колесу с грузиками на спицах привязана нить, другой конец которой привязан к грузу через блок, груз падает, вращает колесо. В ходе эксперимента можно заметить, что при приближении грузиков к центру колесо начинает раскручиваться быстрее.



Рассмотрим величины, действующие при вращательном движении:

1. Момент силы M

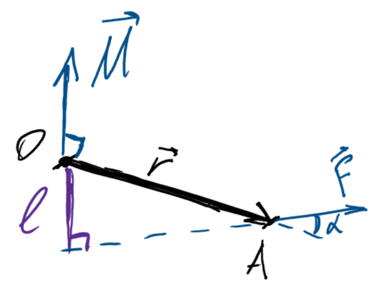
   $M = F \cdot l$

   $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] \qquad M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = l \cdot F$

   Так как момент силы - векторное произведение, то вектор момента силы направлен перпендикулярно к плоскости радиус-вектора и вектора силы

   $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$

   Аналогично рассмотрим момент силы для противоположных сил:

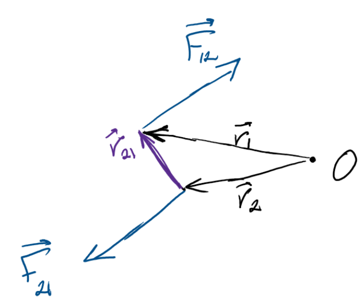


2. Момент пары сил

   $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}] = [(\vec{r}_2 + \vec{r}_{21})\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}] = [\vec{r}_2\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_{21}\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}]$

   $\vec{M} = [\vec{r}_{21}\vec{F}_{12}] = [\vec{r}_{12}\vec{F}_{21}]$

   Момент пары сил равен произведению вектора силы на радиус-вектор между точками приложения сил



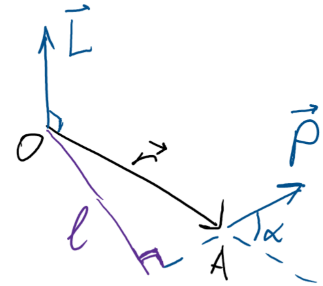
3. Момент импульса L

   Аналогично моменту силы можем определить момент импульса:

   $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$

   $L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p \cdot l$

   $[L] = \text{кг}\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$



4. Уравнение моментов

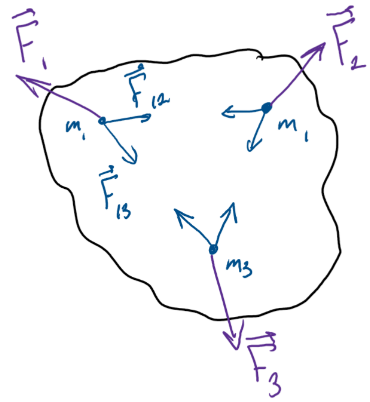
   $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = [\dfrac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}] + [\vec{r}\dfrac{d\vec{p}}{dt}] = \cancelto{0}{[\vec{v}\vec{p}]} + [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M} \qquad \cancelto{0}{[\vec{v}\vec{p}]} \Longleftarrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p}$

   $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{\text{внешн}} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = const$$ - закон сохранения импульса

5. Закон сохранения момента импульса

   Пусть дана система материальных точек. На них действуют силы, которые мы можен разделить на внутренние и внешние

   В замкнутой системе внешние силы сведены к 0:

   $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{\text{внешн}} + \cancelto{0}{\vec{M}_{\text{внутр}}}$$

   Поэтому:

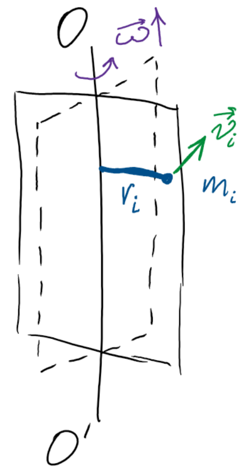
   $\vec{M}_{\text{внешн}} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = const$ - закон сохранения момента импульса

6. Основное уравнение динамики вращательного движения

   $L_i = m_i v_i \cdot r_i = m_i \omega \cdot r_i^2 = \omega m_i r_i^2$

   $L = \sum L_i = \omega \sum m_i r_i^2$

   $\vec{p} = m\vec{v} \qquad L_z = I\omega_z$

   $I = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции системы материальных точек, $[I] = \text{с} \cdot \text{м}^2$

   В интегральной форме: $I = \int r^2 dm$

   Здесь же выделим различное распределение массы

   a) Линейное: $\tau = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l}$
   b) Поверхностное: $\sigma = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds}$
   c) Объемное: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$

   $L_z = I\omega_z$

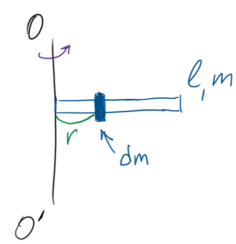
   $\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega_z}{dt} = I\beta_z$

   $\boxed{M_z = I\beta_z}$ - основное уравнение динамики вращательного движения

7. Расчет моментов инерции твердых тел

   Рассмотрим моменты инерции для твердых тел разной формы:

   (a) **Стержень**

   $I = \int r^2 dm$

   $I_{\text{м.т.}} = mr^2$

   $dI = r^2$

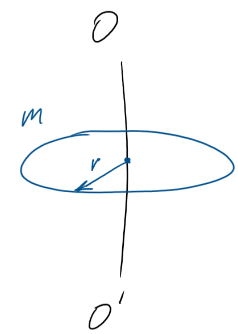
   $$I = \sum_i dI_i = \int_0^l dI = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \tau dl = \int_0^l r^2 \tau dr = \tau \frac{r^3}{3}\Big|_0^l = \tau \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

   $$\boxed{I_{\text{стерж}} = \frac{ml^2}{3}}$$

(b) **Кольцо**

Для кольца тривиально: $\boxed{I_{\text{кольц}} = r^2 m}$

(c) **Диск**



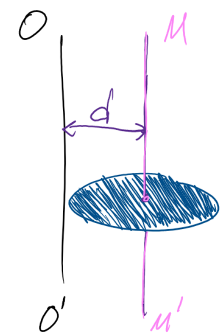
Разбиваем диск на кольца с радиусом r толщиной dr

$dI = dmr^2 = \sigma ds r^2 = \sigma 2\pi r dr r^2 = \sigma ds r^2$

$I = \int \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$

$$\boxed{I_{\text{диск}} = \frac{mR^2}{2}}$$

(d) **Теорема Штейнера**



Теорема Штейнера гласит, что момент инерции тела для неподвижной оси равен сумме момента инерции для оси тела, проходящей через центр масс и параллельной исходной и произведению квадрата расстояния и массы

$I = I_0 + md^2$

Пример: кольцо вращается вокруг оси, расположенной на торце кольца, зная момент импульса в центральной оси кольца и расстояние между осями, можем узнать момент импульса для кольца