

2. Кинематика материальной точки

План лекции

- Основные способы описания движения
- Основные понятия кинематики
- Кинематика поступательного и вращательного движения
- Прямая и обратная задачи кинематики
- Численные методы при решении задач

Def. Кинематика - раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

Def. Траектория - линия, по которой движется материальная точка в пространстве

Def. Путь - длина траектории

Def. Перемещение - вектор, проведенный из начальной точки в конечную

Способы описания движения

Векторный способ

Координатный способ

Естественный (траекторный) способ

Положение точки может быть однозначно определено с помощью радиус-вектора

Положение точки может быть однозначно определено с помощью трех скалярных координат

Положение точки определяется дуговой координатой

Векторный способ

\vec{r}_1, \vec{r}_2 - радиус-векторы, определяющие положения материальной точки в 1 и 2

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - перемещение материальной точки

Def. Скорость - векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки

Средняя скорость - $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Мгновенная скорость - $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Средняя путевая скорость - $v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Def. Ускорение - векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки

Среднее ускорение - $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Мгновенное ускорение - $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Координатный способ

В координатном способе положение точки описано 3 координатами x, y, z (в данном случае в ДПСК)

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Прямая задача:

$$\vec{r}(t), x(t), y(t), z(t) \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{a}(t), v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z$$

Решением является дифференцирование

Обратная задача:

$$\vec{a}(t), a_x, a_y, a_z \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{r}(t), x(t), y(t), z(t)$$

Для обратной задачи решением является интегрирование

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

Аналогично для ускорения

Численное решение ОДУ (обыкновенного дифференциального уравнения) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$

Разбиваем отрезок $[x_0, x_n]$ на конечное число частей введением узловых точек

$$\text{Шаг разбиения: } h = \frac{x_N - x_0}{N}$$

По определению производной $\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, из этого:

$$\text{Формула Эйлера: } y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

Естественный (траекторный) способ

Если траектория точки заранее известна, то положение точки задается дуговой координатой $l(t)$

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \quad v_\tau \frac{dl}{dt} |\vec{\tau}| = 1$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v_\tau \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} v_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v_\tau^2$$

$$d\vec{\tau} = \tau d\alpha$$

$$dl = R d\alpha \quad d\vec{\tau} \uparrow \uparrow \vec{n}$$

R - радиус кривизны траектории

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{1}{R} v_\tau^2 \vec{n} \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлено по касательной к траектории движения

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории