Лекция 15.

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло появился в статье Метрополиса и Улама и был назван в честь района Монте-Карло в Монако, где были расположены элитные казино

Общая постановка задачи: пусть требуется найти неизвестное число a и при этом имеется случайная величина ξ такая, что $E\xi = a$. Тогда по Закону Больших Чисел $\dfrac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} a$ – то есть при длинном разыгрывании $a^* = \dfrac{S_n}{n}$

Оценим погрешность метода: если $D\xi_1 < \infty$, то по ЦПТ $\dfrac{(\xi_1 + \dots + \xi_n) - na}{\sqrt{nD\xi_1}} = \dfrac{n\overline{x} - na}{\sqrt{nD\xi_1}} = \dfrac{n(\overline{x} - a)}{\sqrt{nD\xi_1}} = \sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi_1}} \rightrightarrows N(0,1)$

По правилу «трех сигм» $P\left(\left|\sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi_1}}\right| < 3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.9973 \approx 1 \Longrightarrow \sqrt{n}\dfrac{|\overline{x} - a|}{\sqrt{D\xi_1}} < 3 \Longrightarrow \delta = |\overline{x} - a| < \dfrac{3\sqrt{D\xi_1}}{\sqrt{n}}$

Nota. То есть скорость сходимости в методе Монте-Карло порядка $\sqrt{n}$ – довольно медленная, поэтому метод Монте-Карло применяется в ситуации, не требующих высокой точности, где допустима погрешность 5%

Вычисление интегралов

Мет. $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\Delta x_i$, где Δx_i – длины отрезков разбиения $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, а $x_i \in A_i$

На этом определении построены квадратурные формы:

I. Метод прямоугольников

   Отрезок от a до b разбивается на n равных частей $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

   $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ – середина интервала

   Тогда $I = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + \dots + y_{n-1}) = I_n$, где $y_i = \varphi(x_i)$

   Погрешность $|I - I_n| \le \dfrac{M_1}{n^2}$, где M_1 – некая константа, зависящая от функции и длины интервала

II. Формула трапеций

   Идея состоит в том, чтобы вместо площади прямоугольников считать площади трапеций.

   Отрезок также разбивается на n равных частей

   $y_i = \varphi(x_i)$

   $I = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})) = I_n$

Здесь погрешность $|I - I_n| < \dfrac{M_2}{n^2}$, где $M_2 = \dfrac{M_1}{2}$

III. Формула Симпсона или формула парабол

Здесь вместо трапеций будем использовать площадь под параболой, проходящей через 3 точки

$[a, b]$ разбивается на $n = 2m$ – четное число равных отрезков

$I = \int_a^b \varphi(x)dx \approx \dfrac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) = I_n$

Погрешность $|I - I_n| \le \dfrac{M_3}{n^4}$ – намного лучше, чем у предыдущих двух

IV. Метод Монте-Карло

$I = \int_a^b \varphi(x)dx$

Так как можно привести отрезок $[a, b]$ к $[0, 1]$ при помощи линейной замены $\dfrac{x-a}{b-a}$, то ограничимся интегралом $I = \int_0^1 \varphi(x)dx$

Имеем датчик $\eta_i \in U(0, 1)$, $f_\eta(x) = 1, x \in [0, 1]$

Пусть $\xi_i = \varphi(\eta_i)$, тогда $E\xi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f_\eta(y)dy = \int_0^1 \varphi(y)dy = I.$

Поэтому $I \approx I_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i = \dfrac{1}{n}(\varphi(\eta_1) + \dots + \varphi(\eta_n))$

При этом оценка погрешности будет $|I - I_n| \le \dfrac{3\sqrt{D\xi_1}}{\sqrt{n}}$, где $D\xi_1 = \int_0^1 \varphi^2(y)dy - I^2$

Недостатки: медленная скорость сходимости; для оценки погрешности надо оценить дисперсию $D\xi_i$; оценка справедлива лишь с вероятностью

Поэтому метод Монте-Карло не применяется

Метод Монте-Карло в кратных интегралах

Nota. При вычислении k-кратных интегралов при помощи квадратурных формул число узлов быстро возрастает как n^k, при этом скорость сходимости при больших k будет $\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, где ε - малое число больше 0. А метод Монте-Карло по-прежнему дает скорость сходимости $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, при этом всего лишь достаточно набросать n случайных точек в данную область

$I = \iint \dots \int_D \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)dx_1 dx_2 \dots dx_k$

По методу Монте-Карло $I \approx \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(y_1, \dots, y_k) \cdot I_D$, где $y_1, \dots, y_n$ - значения датчика случайных чисел, а I_D - индикатор, который равен 1, если $(y_1, \dots, y_k) \in D$ (считаем, что $D \subset [0, 1]^k$, а $(y_1, \dots, y_k) \in [0, 1]^k$)

Ex. Вычислим площадь четверти круга $x^2 + y^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0$

Тогда генерируем случайные точки в квадрате $[0, 1]^k$, получаем n точек, из которых n_D входит в круг. Тогда площадь четверти $S_D = \frac{\pi}{4} \approx \frac{n_D}{n} \Longrightarrow \pi = \frac{4}{n_D} n$

Метод Монте-Карло расслоенной выборки

Пусть $I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$

Каждую из сторон куба разобьем на N равных частей, тогда куб разобьется на $n = N^k$ равных кубиков. В каждом из этих кубиков возьмем случайную точку $\eta_i = (\eta_i^{(1)}, \dots, \eta_i^{(k)})$, $1 \le i \le n$

Тогда $I \approx I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\eta_i)$

При этом методе погрешность будет лучше: $|I - I_n| \le \frac{C}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{k}}}$

Например, при $I = \int_0^1 \varphi(x) dx$ погрешность $|I - I_n| \le \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

Равномерность по Вейлю

Def. Числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_i \in [0, 1]$ называется равномерной по Вейлю, если частота попадания точек на любой отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$ стремится к его длине $\frac{b - a}{1}$

В частности значения случайной величины $\xi \in U(0, 1)$ обладают данным свойством согласно Закону Больших Чисел, как и значения датчиков случайных чисел

Th. Пусть $x_n = \{n \cdot \alpha\}$ – дробная часть, где α – иррациональное число. Тогда последовательность x_n является равномерной по Вейлю

Если x_n равномерна по Вейлю, то $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \longrightarrow I = \int_0^1 \varphi(x) dx$

Nota. Но если x_n равномерна по Вейлю, то возможно, что $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, x_{i+1}) \not\longrightarrow I = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) dx dy$, так как соседние члены последовательности будут не такими случайными, как в датчике случайных чисел

Def. Числовая последовательность $x_1, \dots, x_n$, $x_i \in [0, 1]$ называется вполне равномерной, если для любого $k \in \mathbb{N}$ частота попадания k-мерных точек $(x_{(n-1)k+1}, \dots, x_{nk})$ в любой k-мерный параллелепипед внутри $[0, 1]^k$ стремится к объему параллелепипеда

Th. Чемпернауна
Для числа $0.1234567891011121314151617\ldots$ подпоследовательность цифр будет вполне равномерной (то есть каждая последовательность чисел встречается примерно так же часто, как и все другие последовательности чисел той же длины)

Парадокс первой цифры: являются ли все первые цифры в записи числа 2^n равновероятными
Пусть $m = 1, 2, 3, \ldots, 9$ равновероятны $(p = \frac{1}{9})$
Пусть m - первый цифра 2^n. Тогда $m \cdot 10^l \leq 2^n < (m+1) \cdot 10^l$
Прологарифмируем: $l + \log_{10} m \leq n \log_{10} 2 < l + \log_{10}(m+1)$
$\log_{10} m \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(m+1)$
Число $\{n \log_{10} 2\}$ – иррациональное, поэтому последовательность будет равномерной по Вейлю, поэтому $p(m) = \log_{10}(m+1) - \log_{10} m = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$
Например, при $m = 7, p(7) \approx 0.058 \neq \frac{1}{9}$