# Лекция 6.

## Проверка статистических гипотез

$\exists \vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из некоторого распределения $F$

**Def.** Гипотезой $H$ называется предположение о распределении наблюдаемой случайной величины.
Доказать какое-то утверждение с помощью методов матстатистики невозможно - можно лишь с какой-то долей уверенности утверждать

**Def.** Гипотеза называется простой, если она однозначно определяет распределение: $H : F = F_1$, где $F_1$ - распределение известного типа с известными параметрами
В противном случае гипотеза называется сложной - она является объединением конечного или бесконечного числа гипотез
Например, «величина $X$ принадлежит нормальному распределению» - сложная гипотеза, а «величина $X$ принадлежит нормальному распределению с матожиданием $a = 1$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$» - простая
В общем случае работаем со схемой из двух или более гипотез. В ходе проверки принимается ровна одна из них. Мы ограничемся самой простой схемой из 2 гипотез: $H_0$ - основная (нулевая) гипотеза, $H_1 = \overline{H_0}$ - альтернативная (конкурирующая) гипотеза, состоящая в том, что основная гипотеза неверна
Основная гипотеза $H_0$ принимается или отклоняется при помощи статистики критерия $K$
$K(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{R} = \overline{S} \cup S \longrightarrow (H_0, H_1)$
$$\begin{cases} H_0, & \text{если } K(X_1, \ldots, X_n) \in \overline{S} \\ H_1, & \text{если } K(X_1, \ldots, X_n) \in S \end{cases}$$
Вместо «гипотеза доказана» лучше употреблять «гипотеза принимается/отвергается»
Область $S$ называется критической областью, а точка $t_{\text{кр}}$ на границе областей называется критической

**Def.** Ошибка первого рода состоит в том, что $H_0$ отклоняется, хотя она верна. Аналогично, ошибка второго рода состоит в том, что $H_1$ отклоняется, хотя она верна.
**Def.** Вероятность $\alpha$ ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия. Вероятность ошибки второго рода обозначаем $\beta$. Мощностью критерия называется вероятность $1 - \beta$ (вероятность недопущения ошибки второго рода)
Ясно, что критерий будет тем лучше, чем меньше вероятности ошибок $\alpha$ и $\beta$. При увеличении объема выборки уменьшаются обе вероятности. При фиксированном объему попытки уменьшить одну вероятность увеличат другую

Одним из способов является фиксация одной вероятности (принято $\alpha$) и уменьшение другой

## Построение критериев согласия

**Def.** Говорят, что критерий $K$ является критерием асимптотического уровня $\varepsilon$, если вероятность ошибки первого рода $\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon$

**Def.** Критерий $K$ для проверки гипотезы $H_0$ называется состоятельным, если вероятность ошибки второго рода $\beta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**Def.** Критерием согласия уровня $\varepsilon$ называем состоятельный критерий асимптотического уровня $\varepsilon$

Обычно критерий согласия строится по следующей схеме: берется статистика $K(X_1, \ldots, K_n)$, обладающая свойствами:

1. Если $H_0$ верна, то $K(X_1, \ldots, X_n) \rightrightarrows Z$, где $Z$ - известное распределение
2. Если $H_0$ неверна, то есть верна $H_1$, то $K(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \infty$ (достаточно сильно отклоняться от распределения $Z$)

Построенный таким образом критерий является критерием согласия, то есть обладает свойствами

1. критерия асимптотического уровня
2. состоятельного критерия

Пусть $t_{\text{кр}}$ - критическая точка такая, что $P(|Z| > t_{\text{кр}}) = \varepsilon$ - заданный уровень ошибки первого рода

$$\begin{cases} H_0, & \text{если } |K| < t_{\text{кр}} \\ H_1, & \text{если } |K| \geq t_{\text{кр}} \end{cases}$$

1. Тогда $\alpha = P(|K| \geq t_{\text{кр}} \mid H_0) = 1 - P(|K| < t_{\text{кр}} \mid H_0) = 1 - (F_K(t_{\text{кр}}) - F_K(-t_{\text{кр}})) \xrightarrow[n\to\infty]{\substack{\text{т.к. при верной } H_0 \\ F_K(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x)}} 1 - (F_Z(t_{\text{кр}}) - F_Z(-t_{\text{кр}})) = P(|Z| \geq t_{\text{кр}}) = \varepsilon$
2. Если $H_1$ верна, то $|K| \xrightarrow{p} \infty$, то есть $\forall C\ P(|K| > C \mid H_1) \xrightarrow{p} 1 \Longrightarrow \beta = P(|K| < C \mid H_1) \xrightarrow{p} 0$

## Гипотеза о среднем нормальной совокупности при известной дисперсии

$\exists \vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из $N(a, \sigma^2)$, причем $\sigma^2$ известен.

Проверяется гипотеза, что $H_0 : a = a_0$, против $H_1 : a \neq a_0$ для уровня значимости $\alpha$

1. По пункту 1 теоремы, если $H_0 : a = a_0$ верна, то $K = \sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a_0}{\sigma} = \sqrt{n}\dfrac{\overline{x} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

2. Если верна $H_1 : a \neq a_0$, то $|K| = \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-a_0}{\sigma}\right| = \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-a}{\sigma} + \frac{a-a_0}{\sigma}\right| =$

$$= \left| \underbrace{\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma}}_{\substack{\in N(0,1),\text{ограничен} \\ \text{по вероятности}}} + \underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty} \underbrace{\frac{a-a_0}{\sigma}}_{\text{const}} \right| \xrightarrow{p} \infty$$

Для уровня значимости $\alpha$ находим $t_{\text{кр}}$ такую, что $\alpha = P(|K| \geq t_{\text{кр}} \mid H_0) = P(|Z| \geq t_{\text{кр}}) \Longrightarrow P(|Z| < t_{\text{кр}}) = 2F_0(t_{\text{кр}}) - 1 = 1 - \alpha$

$F_0(t_{\text{кр}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ - то есть $t_{\text{кр}}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} H_0, & \text{если } |K| < t_{\text{кр}} \\ H_1, & \text{если } |K| \geq t_{\text{кр}} \end{cases}$$

## Гипотеза о среднем нормальной совокупности при неизвестной дисперсии

1. По пункту 4 основной теоремы, если $H_0 : a = a_0$ верна, то $K = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a_0}{S} = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{S} \in T_{n-1}$
2. Если верна $H_1 : a \neq a_0$, то $|K| = \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-a_0}{S}\right| = \sqrt{n}\left|\frac{\overline{x}-a}{S} + \frac{a-a_0}{S}\right| =$

$$= \left| \underbrace{\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{S}}_{\substack{\in T_{n-1},\text{ограничен} \\ \text{по вероятности}}} + \underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty} \underbrace{\frac{a-a_0}{S}}_{\text{const}} \right| \xrightarrow{p} \infty$$

Аналогично получаем $t_{\text{кр}}$ - квантиль распределения $T_{n-1}$ уровня $1 - \frac{\alpha}{2}$

## Доверительные интервалы как критерии гипотез по параматрам распределения

$\sqsupset (X_1, \ldots, X_n)$ из $F_\theta$, где $F_\theta$ - распределение известного типа с неизвестным параметром $\theta$

Проверяется гипотеза, что $H_0 : \theta = \theta_0$, против $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Допустим, что для $\theta$ построен доверительный интервал $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$, то есть $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) = \gamma$.

Тогда критерий $\begin{cases} H_0, & \text{если } \theta_0 \in (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \\ H_1, & \text{если } \theta_0 \notin (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \end{cases}$ будет уровня $\alpha = 1 - \gamma$

$\alpha = P(\theta_0 \notin (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \mid H_0) = 1 - P(\theta_0 \in (\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+) \mid X \in F_{\theta_0}) = 1 - \gamma$

Поэтому доверительные интервалы можно использовать для проверки гипотез

Но почему в схеме $\begin{cases} H_0 \,:\, a = \overline{x} \\ H_1 \,:\, a \neq \overline{x} \end{cases}$ основная гипотеза всегда верна, тогда как выборочно среднее на практике почти всегда не равняется матожиданию. Потому что ...

> А вот нефиг такие гипотезы вообще выдвигать
>
> © Блаженов А. В.

## Критерий вероятности появления события

$\exists P(A) = p$ - вероятность успеха при одном испытании. При достаточно большом количестве испытаний $n$ событие $A$ появилось $m$ раз. Проверяется $H_0 : p = p_0$ против $H_1 : p \neq p_0$
В качестве статистики критерия возьмем величину $K = \dfrac{m - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$

1. Если $H_0$ верна, то $K = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} \rightrightarrows N(0,1)$ по ЦПТ
2. Lab.

Из тех же соображений $t_{\text{кр}}$ - квантиль $N(0,1)$ уровня $1 - \dfrac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0, & \text{если } |K| < t_{\text{кр}} \\ H_1 : p \neq p_0 & \text{если } |K| \geq t_{\text{кр}} \end{cases}$$

*Ex.* При посеве 4000 семян 970 всходов оказались рецессивного цвета, а 3030 - доминантного. Проверим гипотезу $H_0 : p = \dfrac{1}{4}$ - Мендель прав, против $H_1 : p \neq \dfrac{1}{4}$ - Мендель не прав, для уровня значимости - 0.05

$$K = \frac{m - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{970 - 4000 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{4000 \frac{1}{4} \frac{3}{4}}} \approx -1.095$$

Так как $|K| = 1.095 < 1.96 = t_{\text{кр}}$, то $H_0 : p = \dfrac{1}{4}$ верна