Rem. Дифф. хар.: $div\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}, rot\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}$
Инт. хар.: $\Pi = \iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}, \Gamma = \oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l}$
Мех. смысл: 1) $div\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\Pi}{V}$ - мощность точечного источника
Г.-О.: поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности источников внутри
2) $rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S\to 0}\dfrac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б. м. контуру. Мех. смысл - ?
3) Поток Π - кол-во жидкости через площадку за единицу времени
4) Γ - ?

Nota. Выясним смысл ротора и циркуляции на примере конкретного поля

Ex. $\overrightarrow{F} = -\omega y\overrightarrow{i} + \omega x\overrightarrow{j}$ - поле линейных скоростей, вращающегося твердого тела, где $\overrightarrow{\omega} = const$ - угловая скорость
Выберем контур L, ограничивающий область S
Найдем $\Gamma_L = \oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \oint_L (-\omega y)dx + \omega x dy \overset{\text{Стокс}}{=} \iint_S rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma d\sigma = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma$
Так как ротор сонаправлен оси Oz, получаем $\cos\gamma = 1$
$\iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\iint_S d\sigma = 2\omega S$
Раньше в интеграле видно, что $rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{n} \Longrightarrow |rot\overrightarrow{F}| = 2\omega$
То есть механический смысл ротора - удвоенная угловая скорость вращающегося тела (или диска)

Nota. Чтобы уточнить смысл Γ, рассмотрим такое же поле жидких скоростей (водоворот) $\overrightarrow{v} = -\omega y\overrightarrow{i} + \omega x\overrightarrow{j}$ и погруженное в него колесо с лопатками (водяная мельница)
В качестве контура L берем обод колеса, а его располагаем под углом γ к вектору $\overrightarrow{\omega}$
Все равно $\Gamma_L = \iint_S 2\omega\cos\gamma d\sigma = 2\omega\cos\gamma S$
Если $\gamma = 0$, то $\Gamma_L = 2\omega S$ - максимальная мощность вращения нашей мельницы
Если, например, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, то $\Gamma_L = 0$ - колесо перпендикулярно полю, поэтому оно не вращается

6.6. Приложения к физике

1* Уравнение неразрывности (в гидромеханике)

Nota. Здесь потребуются формулы:
$\dfrac{du(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dots$
$\overrightarrow{\nabla}\cdot(f\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla}f\cdot\overrightarrow{F} + f\cdot(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F})$, где f - скалярное поле, $\overrightarrow{F}$ - векторное поле
Задача Дано $\overrightarrow{F} = \rho\overrightarrow{v}$ - поле скоростей жидкости с весом $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Через площадку dS за время dt протекает $d\Pi = \rho v_n dt dS$ или за ед. времени $d\Pi = \rho v_n dS$

Приращение жидкости за единицу времени $|dm| = |\frac{\partial \rho}{\partial t} dV|$

Поток жидкости равен ее убыли в объеме V, то есть $\Pi = \oiint_S \rho v_n dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

Применяя Г.-О.: $\Pi = \iiint_V \div(\rho \overrightarrow{v}) dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Longleftrightarrow \iiint_V (div(\rho \overrightarrow{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0 \quad \forall V$ (поэтому подынт. функ. = 0)

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla}(\rho \overrightarrow{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Учтем: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\rho \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{\nabla}(\rho \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\nabla}\rho \cdot \overrightarrow{v} + \rho \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla}\rho \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}(\rho \overrightarrow{v}) - \rho \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v}$

$\frac{d\rho}{dt} + \rho div \overrightarrow{v} = 0$ - уравнение неразрывности (при несжимаемой жидкости $div \overrightarrow{v} = 0$)

2* Уравнения Максвелла

Экспериментально: 1) $\int_L \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \iint_S \overrightarrow{r} d\overrightarrow{\sigma}$ - закон Био-Савара

2) $\int_L \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{B} d\overrightarrow{\sigma}$ - закон Фарадея

где $\overrightarrow{H}$ - магнитная сила, $\overrightarrow{r}$ - полный ток, $\overrightarrow{E}$ - электрическая сила, $\overrightarrow{B}$ - магнитная индукция

Максвелл: $\overrightarrow{r}$ = ток проводимости + ток смещения = $\lambda \overrightarrow{E} + \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

λ - коэффициент проводимости, ε, μ - проницаемость

1) $\oint_L \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \iint_S (\lambda \overrightarrow{E} + \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}) d\overrightarrow{\sigma}$

Стокс: $\iint_S rot \overrightarrow{H} d\overrightarrow{\sigma} - \iint_S (\lambda \overrightarrow{E} + \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}) d\overrightarrow{\sigma} = 0$

В векторной форме: $rot \overrightarrow{H} = (\lambda \overrightarrow{E} + \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t})$ - источники магнитного поля - токи проводимости и смещения

2) $\oint_L \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l} = \iint_S rot \overrightarrow{E} d\overrightarrow{\sigma} = -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} d\overrightarrow{\sigma} \Longleftrightarrow rot \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ - изменение индукции дает эл. ток в соленоиде.

3) $\overrightarrow{\nabla}\varepsilon \overrightarrow{E} = \rho$

4) $\overrightarrow{\nabla}\mu \overrightarrow{H} = 0$