5.6. Поверхностные интегралы

1* Поверхностные интегралы I рода (по участку поверхности)

Задача. Масса поверхности

$u = u(x, y, z)$ - плотность (физ. смысл)

Элементарная масса: $dm = u_{\text{ср.}}(\xi, \eta, \zeta)d\sigma$, $d\sigma$ - элемент поверхности

$M = \iint_S dm = \iint_S u(x, y, z)$ - пов. инт. I рода

Def. 1) Дробление S на элементы $\Delta\sigma_k$ коорд. плоскостями $x = x_i, y = y_j$

2) Ср. точка (ξ_k, η_k, ζ_k)

3) Инт. сумма $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k$

4) $\iint_S u(x, y, z)\Delta\sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau = \max \Delta\sigma_k \to 0}} v_n$ - поверхностный интеграл первого рода

Свойства: Смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла: $\iint_{S^+} ud\sigma = \iint_{S^-} ud\sigma$

Вычисление

Мет. Вычисление $\int_L f(x, y)dl$

1) Параметризация L $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

2) $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$

3) $f(x, y) = \tilde{f}(t)$

$\iint_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$

Поверхностный

$\iint_S u(x, y, z)d\sigma$

1) Параметризация S: самая частая - $z = z(x, y), (x, y) \in D$ - пределы интегрирования

2) $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}|dxdy|$, но т. к. в двойном интеграле договорились, что $dxdy > 0$ (площадь), модуль можно не ставить (область D проходится в направлении против часовой стрелки)

3) $u(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z(x, y)) = \tilde{u}(x, y)$

$\iint_S u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x, y)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$

Ex. $S: \ x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 1$

$u(x, y, z) = z$

$$\iint_S z d\sigma = \begin{bmatrix} S: z = \sqrt{x^2+y^2} \\ D: \text{круг}, x^2+y^2=1 \\ d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy \end{bmatrix} = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\rho}\rho\underbrace{\rho}_{|j|}d\rho =$$

$$\sqrt{2}2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

2* II рода. Задача. Поток

Будем говорить о потоке вектора $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ через площадку S в направлении нормали $\overrightarrow{n}^{+}$ или $\overrightarrow{n}^{-}$

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через S за время Δt

В простой ситуации поток $\Pi = FS(\overrightarrow{F} \perp S, \overrightarrow{F} = const)$

В общем случаем $\overrightarrow{F}$ - переменная, S - искривленная и $\angle \overrightarrow{F}, S \neq \dfrac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока $d\Pi$

$d\sigma$ - малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах $d\sigma$ $\overrightarrow{F}$ меняется мало, за среднее берем $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R(x, y, z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то $d\Pi = Fd\sigma$, но в нашем случае высота цилиндра равна пр.$_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{F}) = F\cos\varphi$, где $\overrightarrow{n}$ - единичный вектор нормали, φ - угол между нормалью и потоком, $d\Pi = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда $d\Pi = (\overrightarrow{F}, (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma))d\sigma = (P\cos\alpha, Q\cos\beta, R\cos\gamma)d\sigma$

Итак, $\Pi = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n})d\sigma = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения

Спроектируем $d\sigma$ на координатные плоскости

Сначала разрежем поверхность S на элементы плоскостями $x = const, y = const$ (уточним форму $d\sigma$). Т. к. $d\sigma$ мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда $\cos\gamma d\sigma = \pm dxdy$ (γ - угол между нормалью и осью Oz)

Нашли последнее слагаемое $\iint_{S^{\overrightarrow{n}}} R\cos\gamma d\sigma$ в исходном интеграле (I рода, т. к. по участку $d\sigma$)

Найдем $\iint_{S^{\overrightarrow{n}}} Q\cos\beta d\sigma$, разобьем поверхность на участки $d\sigma$ плоскостями $x = const, y = const$

Аналогично $\cos\beta d\sigma = \pm dxdz$

Тогда в $\iint_{S^{\overrightarrow{n}}} P\cos\alpha d\sigma \quad \cos\alpha d\sigma = \pm dydz$

Окончательно, поток $\Pi = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} \pm Pdydz \pm Qdxdz \pm Rdxdy = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$ - связь интегралов I и II рода

Nota. Формулу интеграла можно получить еще так: $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n})d\sigma = \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}d\sigma = \overrightarrow{F}d\overrightarrow{\sigma}$, где $d\overrightarrow{\sigma} = (\pm dydz, \pm dxdz, \pm dxdy)$

Def. Математическое.
Определим $I = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} f(x,y,z)dxdy$

$I = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta s_k\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$ - поверхностный интеграл второго рода ($\Delta s_k = \Delta x\Delta y$ - любого знака, согласованного с обходом)

Свойства: Меняет знак при смене обхода с $\overrightarrow{n}^+$ на $\overrightarrow{n}^-$

Вычисление

1) Параметризация S для $\iint Rdxdy \quad z = z(x,y)$, для $\iint Qdxdz \quad y = y(x,z)$, для $\iint Pdydz \quad x = x(y,z)$

Пределы интегрирования $D_{xy} = \text{пр.}_{Oxy}S$ и т. д.

2) $dxdy \to \pm dxdy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки ($+dxdy$, если угол между $\overrightarrow{n}$ и Oz острый, иначе $-dxdy$)

3) $R(x,y,z) = \tilde{R}(x,y,z(x,y)), P(x,y,z) = \tilde{P}(y,z), Q(x,y,z) = \tilde{Q}(x,z)$

4) $\iint_{S^{\overrightarrow{n}}} f(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} \pm\tilde{P}dydz \pm \tilde{Q}dxdz \pm \tilde{R}dxdy$