Nota. Итак, в теоремах сказано

1* В любом заданном направлении $\overrightarrow{s}$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

2-3* В направлении $\overrightarrow{\nabla} u$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ наибольшая по модулю, а в направлении $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u$ $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$

4* Градиент $\perp$ линиям уровня. Прямая, содержащая $\overrightarrow{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\overrightarrow{\nabla} u$ - вектор нормали

4.7.3. Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью

Nota. В одной точке может быть множество касательных, но необязательно

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю

Def. Точка M называется особой, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости

□

$d\overrightarrow{s}$ - направляющий вектор касательной τ, проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости

$d\overrightarrow{s}$ - вектор малых приращений, то есть $d\overrightarrow{s} = (dx, dy, dz)$

$d\overrightarrow{p}$ - проекция $d\overrightarrow{s}$ на Oxy, то есть $d\overrightarrow{p} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$

Домножим уравнение на dt

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F. Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ - тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t, как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Или $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$

Таким образом, $\overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = 0$. То есть $\overrightarrow{N} \perp \frac{d\overrightarrow{s}}{dt}$, при том, что $d\overrightarrow{s}$ выбран произвольно (кривая l - кривая произвольного сечения)

Итак, вектор $\overrightarrow{N} \perp$ любой касательной τ к поверхности π в точке M_0. Следовательно, все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\overrightarrow{N} \perp \kappa$

□

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

Def. Прямая в направлении $\overrightarrow{N}$ через точку M_0 называется нормалью к π в M_0

$\overrightarrow{N}$ - вектор нормали к поверхности в точке

Уравнение (π) $\quad F(x, y, z) = 0,\ \overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right),\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi, \kappa, n$

Касательная плоскость (κ) $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$

Нормаль (n) $\quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного задания $\pi \quad z = z(x, y)$

Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x = x_0, y = y_0$.

В сечении получим кривые с касательными векторами

Вектор нормали к π в M_0 $\quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p}$

Найдем $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{p}$

В сечении $x = x_0$

картинка

Введем вектор $d\overrightarrow{p}||\overrightarrow{p}$
$d\overrightarrow{p} = \left(0, dy, \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)dy$
Аналогично найдем $\overrightarrow{m}$ в сечении $y = y_0$
$\overrightarrow{m}||d\overrightarrow{m} = \left(dx, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}dx\right) = \left(1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)dx$
Так как модуль $\overrightarrow{n}$ не важен, а только направление, то будем искать $\overrightarrow{n} = \left(1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \overrightarrow{j}\frac{\partial z}{\partial y} + \overrightarrow{k} =$$
$$= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1\right)$$

Тогда уравнение κ:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = dz$$

Уравнение нормали n: $\dfrac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{1}$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z = f(x, y)$ к уравнению $z - f(x, y) = F(x, y, z) = 0$
Lab. Вывести уравнение κ и n, пользуясь предыдущим замечанием

Nota. Если найти $\overrightarrow{n^-} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{m} = -(\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону
Будем говорить, что $\overrightarrow{n^+}$ - положительный вектор нормали, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^+}, Oz) \in [0; \dfrac{pi}{2})$
$\overrightarrow{n^-}$ - отрицательный, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^-}, Oz) \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$
Соответственно этому верхней стороной π называется та, к которой вектор нормали положительный
Нижней стороне соответствует $\overrightarrow{n^-}$
Если $\overrightarrow{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4. Экстремумы ФНП ($\Phi_2\Pi$)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\quad \Delta z \geq 0$ (min)

Met. Для ФОП формулировали Необходимое условие экстремума (Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум : критические - $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные - $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)
Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяем наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на ФНП
Необходимое условие и достаточное условие аналогично

Th. Необходимое условие экстремума (гладкого):
$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad z_0$ - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \leq z(M)$ или $z_0 \geq z(M)$
Тогда $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0 \end{cases}$
□ Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0$, $y = y_0$ □
Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существования или бесконечность $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Достаточное условие (гладкого) экстремума
Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности M_0 (критическая точка $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)
Тогда, если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{\text{обозн}}{=} A, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{\text{обозн}}{=} B, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{\text{обозн}}{=} C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \Longrightarrow M_0$ - точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \Longrightarrow M_0$ - точка максимума
3. $AC - B^2 < 0$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуются дополнительные исследования)

□

Функция z дважды дифференцируема, тогда ($z_0 = z(M_0)$)
$\Delta z = z - z_0 = \dfrac{dz}{1!}|_{M_0} + \dfrac{d^2 z}{2!}|_{M_0} + o((\Delta\rho)^2) \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},\ dx = \Delta\rho\cos\alpha, dy = \Delta\rho\sin\alpha$
$o((\Delta\rho)^2) = \lambda(\Delta\rho)^3$
Заметим, что $dz|_{M_0} = 0$, так как M_0 - критическая

$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2 = A(\Delta\rho)^2\cos^2\alpha + 2B(\Delta\rho)^2\cos\alpha\sin\alpha + C(\Delta\rho)^2\sin^2\alpha$

Тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + 2\lambda\Delta\rho)$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$A \neq 0$: $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = \frac{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\sin\alpha + B^2\sin^2\alpha + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = \frac{(A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A}$

1) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A > 0)$: Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin\alpha = 0$, то тогда $A\cos\alpha \neq 0$)

Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

Вернемся к $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(k^2 + 2\lambda\Delta\rho)$

Устремим $\Delta\rho \to 0$, начиная с какого-то δ $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $k^2 + \lambda\Delta\rho > 0$

То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \Longrightarrow M_0$ - точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)

2) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A < 0)$, тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta\rho$

3) $\sqsupset AC - B^2 < 0 (A > 0)$, тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = 0$

$\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A + 2\lambda\Delta\rho) > 0$

$tg\alpha = -\frac{A}{B} \Longrightarrow \frac{(AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \frac{(\Delta\rho)^2}{2}(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$

Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $tg\alpha = -\frac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \Longrightarrow$ нет экстремума

Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$

4) $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(\sin\alpha(2B\cos\alpha + C\sin\alpha) + 2\lambda\Delta\rho)$

Пусть α беск. мал, тогда $\sin\alpha \approx 0, C\sin\alpha \approx 0, 2B\cos\alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin\alpha \cdot 2B$ зависит от α

То есть Δz колеблется вместе с α по знаку $\Longrightarrow$ нет экстремума

Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $tg\alpha = -\frac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α

□