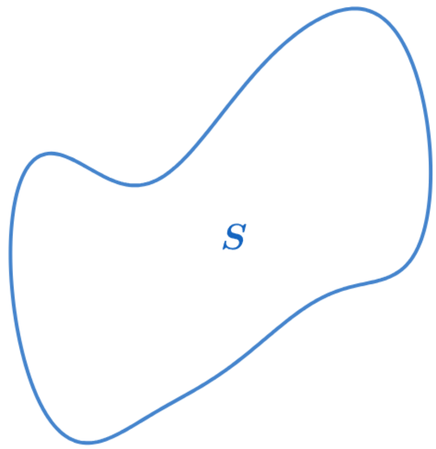
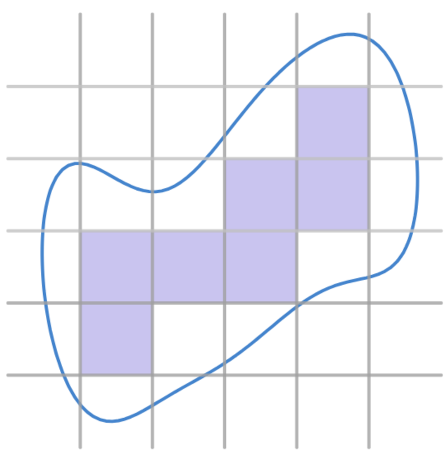
1. Определенный интеграл

1.1. Задача и определение

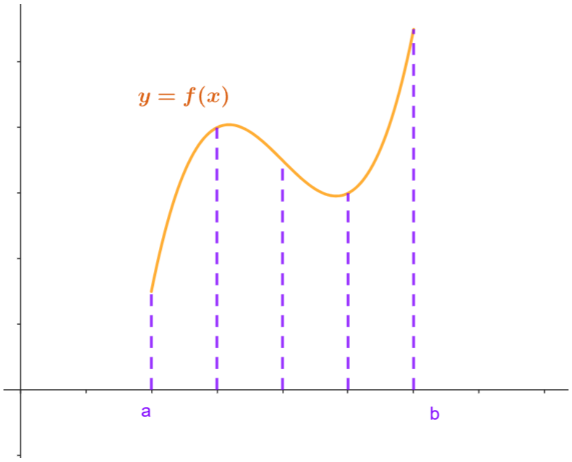
Задача. Дана криволинейная фигура:

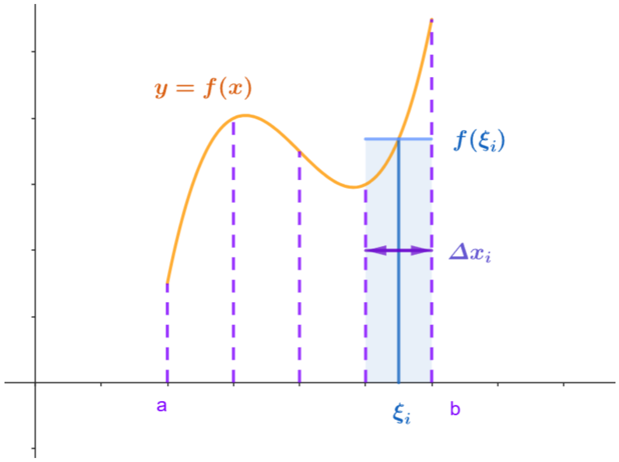


Надо найти ее площадь S
Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)
Сведем задачу к простейшей в ДПСК:





1. Вводим разбиение отрезка $[a; b]$ $(a < b)$ точками $a < x_0 < \dots < x_n < b$
   $T = \{x_i\}_{i=0}^n$
2. Выбираем средние точки на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^n$
   $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ - набор средних точек
   $\Delta x_i \overset{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка
3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$$

   - интегральная сумма Римана
5. Заменяя разбиение, выбор ξ_i при каждом n, получаем последовательность $\{\sigma_n\}$
   При этом следим, чтобы ранг разбиения $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$
   Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \tau \to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \tau \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

Ex. $\mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал dx имеет смысл Δx, понимается как б. м., то есть:

$f(x)dx$ - площадь элементарных прямоугольников, тогда

$\int_a^b f(x)dx$ - сумма этих прямоугольников

1. $\int_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

Геом. смысл: Заметим, что в определении интеграл - площадь подграфика функции ($f(x) \geq 0$)

Заметим, что для $f(x) \leq 0 \quad \int_a^b f(x)dx = -S$

1.2. Свойства

1. Линейность пределов $\Longrightarrow$ линейность пределов
   $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов
3. Оценка определенного интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ (имеет наимен. (m) и наибол. (M) значения). Тогда:
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
   □ Док-во:
   По теореме Вейерштрасса 2 $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого x из $[a;b]$: $m <= f(x) <= M$
   Так как все средние точки принадлежат $[a;b]$, то
   $m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$
   $m\Delta_i \leq f(\xi_i)\Delta_i \leq M\Delta_i$
   $m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq f(\xi_i)\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$
   Предельный переход:
   $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

$$m \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \le \int_a^b f(x)dx \le M \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$\square$

4. **Th.** Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

   $f(x) \in C'_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   Тогда найдется такая средняя точка, что

   $f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   $\square$

   $m \le \underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{некоторое число}} \le M$ по свойству выше

   По теореме Больцано-Коши $f(x)$ непрерывна, поэтому пробегает все значения от m до M

   Значит найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   $\square$

5. Сравнение интегралов

   $f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \ge g(x)$

   Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

   $\square$

   $$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(\xi_i)-g(\xi_i))}_{\ge 0}\underbrace{\Delta x_i}_{\ge 0} \ge 0$$

   $\square$

6. Интеграл и модуль

   $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \le \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

   $\square$

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

   $$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

   Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   Так как определен $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$, то можно рассмотреть случаи

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n > 0$ (вблизи S)

   $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n < 0$ (вблизи S)

   $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = -\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S = 0: \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = 0$

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$ (модуль суммы меньше или равен сумме модулей)

□

Nota. Интеграл и разрыв

Изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

Nota. Сходимость интеграла - в определении интеграла подчеркивается, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

Nota. Вычисления

Определение дает способ вычисления и его можно упростить:

$\forall i\ \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \left[\begin{array}{l} x_{i-1} \\ x_i \end{array}\right.$ - концы отрезка

Так вычисляют «неберущиеся интегралы»

Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

1.3. Вычисление определенного интеграла

1.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x) : [a;+\infty), f(x) \in C_{[a;+\infty)}$

$\forall x \in [a;+\infty)$ определен $\displaystyle\int_a^x f(x)dx$

Таким образом определена функция $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ - переменная площадь

В общем случае обозначим $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad t \in [a,x]$

Итак, различают три объекта:

1. Семейство функций: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$
2. Функция $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$
3. Число $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$

Выявим связь между ними.

Th. Об интеграле с переменным верхним пределом (Барроу)

$f(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a;+\infty+}$

Тогда $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ - первообразная для $f(x)$ - $\Phi(x) = F(x)$

□

Докажем по определению

$\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} =$ [по **Th.** Лагранжа $\exists \xi \in [x; x + \Delta x]$] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$

□

Th. Основная теорема математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, N-L)

$f(x) \in C_{[a;b]}, F(x)$ - какая-либо первообразная $f(x)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

□

Для $f(x)$ определена $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Найдем значения $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$

$\Phi(a) = F(a) + C = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0 \Longrightarrow F(a) + C = 0 \Longrightarrow F(a) = -C$

$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

□

1.3.2. Методы интегрирования

1* Замена переменной в определенном интеграле

Th. $f(x) \in C_{[a;b]} \quad x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

□

N-L: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Докажем, что $F(x) = F(\varphi(t))$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\dfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\dfrac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \dfrac{dF(x)}{dx}\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t)$

□

Ex. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ x \uparrow_0^{\frac{1}{2}} \quad t \uparrow_0^{\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{|\cos t|} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

2* По частям

Th. $u, v \in C'_{[a;b]} \quad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Тогда: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

□

$u(x)v(x)$ - первообразная для $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

Или $d(uv) = udv + vdu$

По формуле N-L $\int_a^b (udv + vdu) = \int_a^b d(uv) = u(x)v(x)\Big|_a^b$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

□

Ex. $\int_1^e \ln x dx = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

Nota. Не всякий интеграл вида $\int_a^b f(x)dx$ является определенным

Ex. $\int_0^e \ln x dx = x \ln x\Big|_0^e - x\Big|_0^e = e \ln e - \underbrace{0 \ln 0}_{0 \cdot \infty} - e$ - несобственный интеграл