Теория игр

Содержание

Теория игр занимается задачами оптимизации, где требуется выбрать наиболее оптимальное решение

Частенько возникают более хитрые задачи, где нет всех вводных данных, и требуется принять решений в неопределенности. В задачах теории игр возникают противодействующие стороны, поэтому нужно предугадывать действие противоположной стороны

Теория игр изучает, как нужно решать такие задачи

Данный раздел появился в XIX веке, где экономисты изучали дуополии на рынке. Далее развитие теория игр получила в XX веке в книге фон Неймана, а затем и после войны. От него получили развитие теория войны, теория переговоров, теория макроэкономики и другие подобные теории

Лекция 1

Def. Игра – идеальная математическая модель реальной конфликтной ситуации. Стороны конфликта называются **игроками**. Поведение игрока во время конфликта называется **стратегией игрока**

Набор выбранных игроками стратегий называется ситуацией игры. При постановки задачи каждой ситуации игры предписывается числовой вектор, каждая координата которого – выигрыши игроков в данной ситуации

Игры классифицируются:

- По количеству игроков
- По количеству стратегий – конечные, бесконечные
- По типу взаимодействия игроков – антагонистические или кооперативные (также коалиционные)

Def. Антагонистическая игра – игра двух игроков с нулевой суммой

Def. Игра называется с нулевой суммой (*zero-sum game*), если сумма выигрыша всех игроков равна нулю

Матричные игры

Def. Матричной игрой называется конечная антагонистическая игра, то есть:

1. Два игрока
2. Каждый игрок имеет конечное число вариантов игры
3. Игра с нулевой суммой – выигрыш одного игрока равен проигрышу другого

Пусть первый игрок имеет n вариантов игры – $A_1, A_2, ..., A_n$, а второй имеет варианты $B_1, B_2, ..., B_n$

То есть при одной игры первый игрок выбирает один из n вариантов, а второй из других n вариантов

Нас интересует, сколько выиграет первый игрок, так как с легкостью можно найти

Тогда будем рассматривать функцию $H\left(A_i, B_j\right) = a_{ij}$ – выигрыш первого игрока

Из этих чисел a_{ij} можно составить матрицу, поэтому такую игру можно смоделировать матрицей игры A (также называют платежной матрицей):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Строки соответствуют вариантам игры первого игрока, столбцы – вариантам второго, а элемент a_{ij} – выигрышу первого игрока, в ситуации, когда первый игрок выбрал i-ую строку, а второй – j-ый столбец

Ex. Орлянка: первый игрок загадывает орла или решку, а второй отгадывает

Матрица для этой игры составляется как $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, где первая строка – первый игрок загадал орла, а первый столбец – второй игрок отгадал орла

Обычно такие игры происходят несколько раз, поэтому если загадывать орла все время, то второй игрок догадается, что нужно выбирать орла

Поэтому нужно выбирать случайно, причем одинаково случайно, так как если решка загадывается в 60% случаях, второй игрок может отгадываться всегда решку и быть в плюсе

Стратегия первая игрока $P^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а второго – $Q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Средний ожидаемый выигрыш первого игрока будет $H(P^*, Q^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$, что логично в силу симметрии игры

Полученный 0 называют ценой данной игры. При этом, если игроки играют много, ничьи не будет (смотрите задачу о блуждании точки на прямой)

Def. Смешанной стратегией игрока называется набор вероятностей $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ $(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1)$, где p_i – вероятность выбора i-ого варианта игры

Nota. Аналогично для второго игрока $Q = (q_1, \dots, q_n)$

Def. Чистой стратегией называется стратегия вида $A_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, когда игрок всегда выбирает i-ый вариант игры и $p_i = 1$

Nota. Смешанную стратегию удобно рассматривать как линейную комбинацию чистых: $P = p_1 A_1 + \dots p_n A_n$

Если $P = (p_1, ..., p_n)$ – стратегия первого игрока, $Q = (q_1, ..., q_n)$ – стратегия второго игрока, то средний ожидаемый выигрыш первого игрока равен $H(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$

Def. Стратегии игроков P^* и Q^* называются **оптимальными**, если для любых стратегий P и Q справедливо $H(P, Q^*) \leq H(P^*, Q^*) \leq H(P^*, Q)$ – такая точка равновесия, от которой каждому игроку невыгодно отклонятся

Def. Ценой игры $\nu = H(P^*, Q^*)$ называется средний ожидаемый результат игры при применении игроками оптимальных стратегий

Nota. Игра называется честной, если цена ν равна 0

Def. Решением игры называется набор (P^*, Q^*, ν)

Nota. Условия оптимальности равносильно $\max\limits_P \min\limits_Q H(P, Q) = \min\limits_Q \max\limits_P H(P, Q) = H(P^*, Q^*)$

Th. фон Неймана. Для любой матричной игры существуют и равны между собой $\max\limits_P \min\limits_Q H(P, Q) = \min\limits_Q \max\limits_P H(P, Q)$, то есть любая матричная игра имеет решение

Теорема фон Неймана представляет собой частный случай теоремы Джона Нэша о биматричных играх

Nota. При этом оптимальные стратегии могут быть разными, но цена игры определена однозначно

Ex. Найдем цену для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Второй игрок допускает, что первый выберет первую строку, тогда ему выгоднее выбирать четвертый столбец, так как $a_{1,4} = -4$. Если вторую строку, то второй столбец $a_{22} = 1$, если третью, то первый столбец $a_{3,1} = -3$

Получаем $\nu_* = \max\limits_i \min\limits_j a_{i,j} = \max(-4, 1, -3) = 1$ – нижняя цена игры, гарантированный выигрыш первого игрока

Если думать с другой стороны, то $\nu^* = \min\limits_j \max\limits_i a_{i,j} = \min\limits_j(2, 4, 7, 2) = 2$ (первый или четвертый столбец) – верхняя цена игры, гарантированный максимальный проигрыш первого игрока

Заметим, что $\nu_* \leq \nu^*$, реальная цена игры лежит между ν_* и ν^*. В данном случае игра имеет решений в смешанных стратегиях, так как $\nu_* < \nu^*$

Ex. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Получаем $\nu_* = \max(-2, 1, 3) = 1$, $\nu^* = \min(3, 2, 1) = 1$

Здесь цены совпали, значит $\nu = \nu_* = \nu^* = 1$, следовательно игра имеет решение в чистых стратегиях: $P = (0, 1, 0)$ – выбор второй строки, $Q = (0, 0, 1)$ – выбор третьего столбца

Def. Если игра имеет совпадающие верхнюю и нижнюю цены игры, то говорят, что игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях. Если нет, то игра имеет решение в смешанных стратегиях

Def. Пусть $P = (p_1, ..., p_n)$ – стратегия игрока. Если $p_i > 0$, то говорят, что чистая стратегия A_i в линейной комбинации – активная. Аналогично, если $p_i = 0$, то A_i – неактивная

Th. Если A_i – активная стратегия первого игрока, B_j – активная стратегия второго игрока, P^* и Q^* – их оптимальные стратегии, то $H(A_i, Q^*) = H\left(P^*, B_j\right) = H(P^*, Q^*) = \nu$

Из этого следует критерий оптимальности стратегии:

Th. Если стратегии P^* и Q^* – оптимальные, то для всех чистых стратегий A_i и B_j справедливо, что $H(A_i, Q^*) \leq H(P^*, Q^*) \leq H\left(P^*, B_j\right)$ (то есть достаточно проверить неравенство только для чистых стратегий)

Ex. Игра «Камень-ножницы-бумага»

Для нее $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (первая строка – камень, вторая строка – ножницы, третья строка – бумага)

Из соображений симметрии можно предположить, что оптимальной стратегией будет $P^* = Q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а цена равна 0

Проверим неравенства:

1. $H(A_1, Q^*) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \leq \nu$
2. $H(A_2, Q^*) = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \leq \nu$
3. $H(A_3, Q^*) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \leq \nu$
4. $H(P^*, B_1) = 0 \geq \nu$
5. $H(P^*, B_2) = 0 \geq \nu$

6. $H(P^*, B_3) = 0 \geq \nu$

Второе следствие: алгоритм решения игры 2×2. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда:

1. Смотрим, имеет ли игра решения в чистых стратегиях (ищем седловую точку). Если имеет, то игра решена
2. Если не имеет, то обе стратегии должны быть активными, и должно выполняться неравенство. Пусть $P^* = (p_1, p_2)$ и $Q^* = (q_1, q_2)$ – оптимальные стратегии, тогда получаем две системы из трех уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ a_{11}q_1 + q_{12}q_2 = \nu \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu \end{cases}$$

Рассмотрим этот алгоритм для орлянки: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ -1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = \nu \\ 1 \cdot p_1 + (-1) \cdot p_2 = \nu \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ 2\nu = 0 \\ 2(p_2 - p_1) = 2\nu \end{cases} \iff \begin{cases} \nu = 0 \\ p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Аналогично для второго игрока $\begin{cases} \nu = 0 \\ q_1 = \frac{1}{2} \\ q_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Лекция 2

Решение игр $2 \times n$ и $n \times 2$

Если матрица игры состоит из двух строк или двух столбцов, то она сводится к решению игры 2×2 геометрическим способом

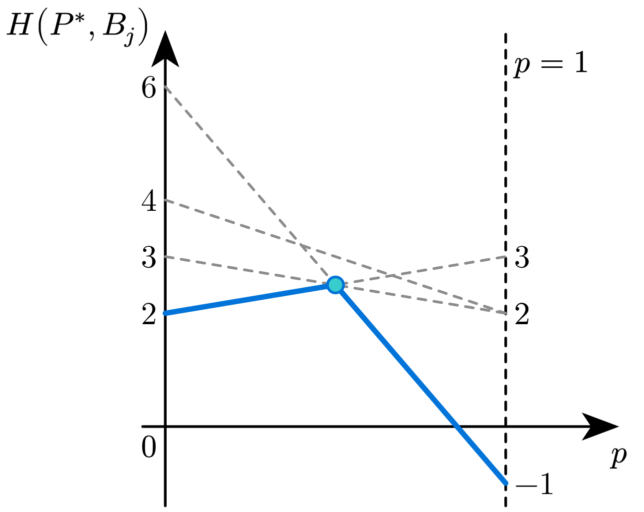
Ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Пусть оптимальная стратегия первого игрока $P^* = (p, 1-p)$

Тогда при применении вторым игроком чистой j-ой стратегии, ожидаемый выигрыш будет $H\big(P^*, B_j\big) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$ – уравнение отрезка с концами $\big(0, a_{2j}\big)$ и $\big(1, a_{1j}\big)$

Соберем результаты каждой чистой стратегии в таблицу:

Стратегия	$p = 0$	$p = 1$
1	4	2
2	3	2
3	2	3
4	6	-1



Решение игры находятся в верхней точке нижней огибающей всех отрезков.
Активными стратегиями второго игрока будут 3 и 4

Вычеркнув неактивные стратегии, получаем матрицу $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Ее решением будет для первого игрока $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; для второго игрока: $(3, -1) - (2, 6) = (1, -7) \Longrightarrow Q^* = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$

Цена игры равна $\nu = H(P^*, B_3) = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = 2.5$

Nota. Если игра состоит из двух столбцов, то смотрим с точки зрения второго игрока. И решением игры будет нижняя вершина верхней огибающей

Доминируемая стратегия

Пусть в игре участвуют n игроков, S_i – возможные стратегии i-ого игрока (в общем случае их может быть бесконечное число), а S_{-i} – наборы всех возможных стратегий остальных игроков

Def. Стратегия $s \in S_i$ i-ого игрока **строго доминируема**, если существует стратегия $s' \in S_i$ такая, что $H(s, s_{-i}) < H(s', s_{-i})$ для любых $s_{-i} \in S_{-i}$

Def. Стратегия $s \in S_i$ **слабо доминируема**, если $\exists s' \in S_i$ такая, что $H(s, s_{-i}) \leq H(s', s_{-i})$ для любых $s_{-i} \in S_{-i}$

Если стратегия строго доминируема, то во всех возможных стратегиях остальных игроков результат ее применения будет хуже, чем при некоторой другой стратегии. Поэтому i-ый игрок никогда ее не применяет, остальные игроки это понимают, из-за этого строго доминируемые стратегии можно вычеркнуть, а игра упрощается

Nota. В общем случае можно вычеркивать только строго доминируемые стратегии, в противном случае можем потерять важные точки равновесия. В матричных играх допустимо вычеркивать слабо доминируемые

Ex. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Первая строка имеет числа не большие, чем третья, поэтому третья строка слабо доминирует над первой – ее невыгодно брать первому игроку

Вторая стратегия второго игрока строго доминирует над третьей и пятой, поэтому можно вычеркнуть третий и пятый столбцы

Получаем матрицу проще $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, которую можно решить геометрическим способом

В итоговом решении игры на место вычеркнутых стратегий ставим 0 (то есть $P^* = (0, p_2, p_3)$, $Q^* = (q_1, q_2, 0, q_4, 0)$), а цены игр с матрицами A и A' равны

Nota. В матричной игре доминируемые будут меньшие строки и большие столбцы

Ex. 1. Морской бой

Первый игрок в области 2×3 размещает корабль 1×2, второй игрок стреляет в область, при первом попадании корабль умирает

Отметим точки на области так:

1	2	3
4	5	6

Тогда матрица морского боя выглядит так:

$$\begin{array}{c} \\ (1,2) \\ (2,3) \\ (4,5) \\ (5,6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Очевидно, что второй столбец доминирует над первым и третьим столбцами, а пятый над четвертым и шестым

$$\begin{array}{c} \\ (1,2) \\ (2,3) \\ (4,5) \\ (5,6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

По тем же причинам вычеркиваем вторую и третью строки (игра симметрична относительно того, как ставить корабль в определенной строке)

$$\begin{array}{c} \\ (1,2) \\ (5,6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Получаем орлянку: $P^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = 0$

Ex. 2. Море Бисмарка

В 1943 году генерал Хитоси Имамура должен был доставить подкрепление в оккупированную Новую Гвинею, а адмирал Джордж Кенни должен был воспрепятствовать этому с помощью авиации

Имамура мог идти только северным или южным путями. В первом случае он попадал на два дня в зону действия авиации, а во втором на три. Кенни мог послать авиацию только в одну точку и только на один день за раз

За выигрыш считаем число дней, в течение которых происходила бомбардировка морского флота Японии

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Север} & \text{Юг}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Север} \\ \text{Юг}\end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Стратегия Имамуры послать корабли на север слабо доминирует, поэтому вторая стратегия не имеет смысла. Кенни понял, что Имамура отправит подкрепление северным путем, поэтому послал авиацию на север

Ex. 3. Аукцион второй цены (или аукцион Викри)

Выставлен на аукцион лот, на него пришли n потенциальных покупателей. Установим v_i – ценность лота для i-ого игрока, s_i – цена за лот, которую предлагает i-ый покупатель. Лот забирает тот, кто предлагает наибольшую цену, но платит за нее вторую максимальную ставку

При данном аукционе для каждого покупателя доминирующей (слабо) стратегией будет предложить цену s_i, в которую он оценивает данный лот v_i

Проверим это. Пусть r_i – вторая цена, тогда:

1. Сравним с $s_i > v_i$

	$r_i > s_i > v_i$	$r_i < v_i \leq s_i$	$v_i < r_i < s_i$
$s_i = v_i$	0	$v_i - r_i \geq 0$	0
$s_i > v_i$	0	$v_i - r_i \geq 0$	$v_i - r_i < 0$

Здесь первая стратегия слабо доминирует над второй

2. Сравним с $s_i < v_i$

	$r_i < s_i \leq v_i$	$r_i > s_i$	$s_i < r_i < v_i$
$s_i = v_i$	$v_i - r_i \geq 0$	0	$v_i - r_i \geq 0$

	$r_i < s_i \le v_i$	$r_i > s_i$	$s_i < r_i < v_i$
$s_i < v_i$	$v_i - r_i \ge 0$	0	0

Аналогично, нет смысла брать $s_i < v_i$

В этом аукционе игрок должен предлагать «искреннюю» цену, то есть ту, в которую он ее оценивает. В результате лот получит игрок, для которого он наиболее ценен

Лекция 3

Аффинное правило

Th. Пусть имеется две матричных игры, заданные матрицами A и B одного размера, причем элементы матрицы $b_{ij} = ka_{ij} + C, k > 0$. Тогда оптимальные стратегии в этих играх совпадают, а цена игры $\nu_B = k\nu_A + C$

Пусть $H_A(P,Q)$ – средний ожидаемый выигрыш в первой игре при выбранных стратегиях P и Q. Аналогично для $H_B(P,Q)$

В силу линейности математического ожидания $H_B(P,Q) = kH_A(P,Q) + C$

Если P^* и Q^* – оптимальные стратегии для игры A, то по определению $H_A(P,Q^*) \le H(P^*,Q^*) \le H_A(P^*,Q)$ для любых P,Q

Равносильно $H_B(P,Q^*) = kH_A(P,Q^*) + C \le kH(P^*,Q^*) + C \le kH_A(P^*,Q) + C = H_B(P^*,Q)$ для $k > 0$ и любых P^*,Q^*

$\nu_B = H_B(P^*,Q^*) = kH_A(P^*,Q^*) + C = k\nu_A + C$

Задачи линейного программирования

Def. Задачей линейного программирования называется задача оптимизации, в которой целевая функция линейная и все ограничения также являются линейным равенствами или неравенствами

Здесь слово «программирование» (programming) имеет смысл планирования

Ex. Производственная задача: пусть предприятие может выпускать три вида продукции, рыночная цена одной единицы продукции равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. При производстве тратятся три вида ресурсов

При производстве одной единицы продукции первого вида расходуются a_{11} единиц сырья первого типа, a_{21} второго типа и a_{31} третьего типа. Соответственно a_{12}, a_{22}, a_{32} для второго вида продукции и a_{13}, a_{23}, a_{33} для третьего вида

Всего в наличии b_1 единиц сырья первого типа, b_2 второго типа, b_3 третьего типа

Цель – получить больше прибыли

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество единиц каждого вида

Тогда прибыль равна $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow \max$. Но при этом у нас есть условия:

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_1$
- $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_1$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ex. Задача о диете: пусть рацион можно составлять из комбикормов трех видов. Стоимости комбикормов равны c_1, c_2 и c_3 соответственно

Первый комбикорм содержит a_{11} калорий, второй – a_{21}, третий – a_{31}; первый комбикорм содержит a_{12} микроэлементов, второй – a_{22}, третий – a_{32}; первый комбикорм содержит a_{13} антибиотиков, второй – a_{23}, третий – a_{33}

Требуется составить рацион наименьшей стоимости такой, что бы было не менее b_1 калорий, ровно b_2 микроэлементов и не более b_3 антибиотиков

Пусть x_1 – число кг комбикорма первого вида, x_2 – второго, x_3 – третьего

Тогда стоимость равна $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow \min$

Условия формируются так:

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1$
- $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_1$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ex. В три магазина завозится товар с трех баз. Стоимость перевозки с i-ой базы в j-ый магазин одной единицы товара равна c_{ij}

На первой базе в наличии a_1 товара, на второй – a_2, на третьей – a_3. Первый магазин требует b_1 товара, второй – b_2, третий – b_3

Пусть x_{ij} – количество товара, перевозимое из i-ой базы в j-ый магазин

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_{11}	c_{21}	c_{31}
b_2	c_{12}	c_{22}	c_{32}
b_3	c_{13}	c_{23}	c_{33}

Тогда целевая функция равна $f(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{33}x_{33} \longrightarrow \min$ при условиях

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\le a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le a_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\le a_3 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3 \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

Такие задачи появились во время высадки в Нормандию, когда нужно было планировать логистику критически важные поставок. До этого в 1938 году русский математик Л. В. Кантерович наткнулся на задачу по составлению наилучшего плана загрузки лущильных станков, после чего опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства»

Позже в 1949 американский математик Джордж Данциг разработал метод решения задач линейного программирования – симплекс-метод. На этом курсе не будут рассматриваться методы решения, так как прикладные задачи включают тысячи условия, которые могут быть обработаны современными статпакетами

Def. Задача линейного программирования называется канонической, если:

1. требуется найти максимум целевой функции $f(x_1, ..., x_n) \longrightarrow \max$
2. все ограничения выражаются со знаком меньше либо равно:
$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n\ge b_1 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+...+a_{mn}x_n\ge b_m \end{cases}$$
3. на все переменные действует условия неотрицательности $x_i \ge 0$

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить двойственную:
$g(y_1, ..., y_m) = b_2y_2 + ... + b_my_m \longrightarrow \min$ при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+...+a_{m1}y_m\ge c_1 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1+...+a_{mn}y_m\ge c_n \\ y_1\ge 0 \\ \vdots \\ y_n\ge 0 \end{cases}$$

Основные теоремы линейного программирования:

Th. 1. Область допустимых решений представляет выпуклый многогранник, а оптимальное решение лежит в одной из его вершин

Th. 2. Если X^* и Y^* – оптимальные решения двойственных задач, то значения целевых функций совпадают $f(X^*) = g(Y^*)$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица игры, причем известно, что цена игры $\nu > 0$. Пусть $P^* = (p_1, ..., p_n)$ и $Q^* = (q_1, ..., q_m)$ – оптимальные стратегии

Цель первого игрока – максимизировать выигрыш:

$$H(P^*, Q^*) = \nu \longrightarrow \max \text{ при условиях } \begin{cases} p_1 + ... + p_n = 1 \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \geq \nu \quad \forall 1 \leq j \leq m \\ p_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

А цель второго – минимизировать проигрыш:

$$H(P^*, Q^*) = \nu \longrightarrow \min \text{ при условиях } \begin{cases} q_1 + ... + q_m = 1 \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j \leq \nu \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ q_j \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Поделим все ограничения на цену игры (так как $\nu > 0$, знаки неравенства не изменятся)

$$\begin{cases} \frac{p_1}{\nu} + ... + \frac{p_n}{\nu} = \frac{1}{\nu} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{p_i}{\nu} \geq 1 \quad \forall 1 \leq j \leq m \\ \frac{p_i}{\nu} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{q_1}{\nu} + ... + \frac{q_m}{\nu} = \frac{1}{\nu} \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{q_j}{\nu} \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \frac{q_j}{\nu} \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Обозначим за $x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$, $y_j = \dfrac{q_j}{\nu}$

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{\nu}, \sum_{j=1}^m y_j = \frac{1}{\nu}$

Если $v \longrightarrow \max(\text{или} \min)$, то $\dfrac{1}{\nu} \longrightarrow \min(\text{или} \max)$, в результате получаем две двойственные задачи линейного программирования:

1-ый игрок

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq 1 \quad \forall 1 \leq j \leq m \\ x_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

2-ой игрок

$$g(y_1, ..., y_m) = y_1 + ... + y_m \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ y_j \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Решив эти двойственные задачи, получаем $X^* = (x_1, ..., x_n)$, $Y^* = (y_1, ..., y_m)$. Тогда цена игры равна $\nu = \dfrac{1}{f(X^*)} = \dfrac{1}{g(Y^*)}$, оптимальные стратегии равны $P^* = \nu X^*$, $Q^* = \nu Y^*$

Ex. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу, убрав доминируемые стратегии: $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Чтобы гарантированно цена игры была неотрицательной, прибавим к элементам 3 (при этом соблюдается аффинное правило): $A'' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \nu'' > 0$

Составим две задачи линейного программирования:

1-ый игрок

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \longrightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 0x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ 7x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2-ой игрок

$g(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 5y_1 + 0y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

симплекс метод вручную, матпакет

При их решении, например, с помощью Excel получили:

- $x_1 = 0.10714, x_2 = 0.25, f(x_1, x_2) = 0.35714$
- $y_1 = 0, y_2 = 0.21429, y_3 = 0.14286, g(y_1, y_2, y_3) = 0.35714$
- $\nu'' = \dfrac{1}{f(x_1, x_2)} = 2.8$
- $P'' = v''X^* = (0.3, 0.7)$
- $Q'' = v''Y^* = (0, 0.6, 0.4)$

Для игры с матрицей A' стратегии будут теми же $P' = P'', Q' = Q''$, но цена игры уменьшиться $\nu' = \nu'' - 3 = -0.2$

Ответ: $P^* = (0, 0.3, 0.7)$, $Q^* = (0, 0.6, 0, 0.4, 0)$, $\nu = -0.2$