Лекция 10

Элементы теории принятия решений

Пусть требуется выбрать одно из решений $A_1, A_2, ..., A_n$ при условии, что «природа» приняла одно из состояний $Q_1, Q_2, ..., Q_m$. Допустим, что выигрыш вполне определенный для i-ого решения и j-ого состояния «природы» и равен a_{ij}

Матрица $A_{n\times m} = \left(a_{ij}\right)$ называется платежной матрицей

Такая модель похожа на модель матричной игры, но есть различия:

- В матричных играх мы подразумевали, что противник рационален, тогда как здесь «природа» не играет и может выбрать любое состояние, поэтому нельзя удалять доминируемые столбцы
- Часто невозможны смешанные стратегии, так как игра происходит один раз

Def. Если вероятности состояния «природы» неизвестны, то говорят, что решения принимаются в условиях полной неопределенности. Если вероятности состояния «природы» известны, то говорят, что решения принимаются в условиях риска

Принятие решения в условиях полной неопределенности

1. Критерий максимакса (критерий крайнего оптимизма) – $M = \max\limits_{i,j} a_{ij}$

   Ex. Ларек на курорте предлагает такие товары: полотенце, крем от загара, дождевик, надувной матрас. В зависимости от 4 состояний погоды прибыль за сезон может составить:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   Так как решение A_3 доминирует над A_4, можно удалить надувные матрасы из продажи

   $M = \max\limits_{i} \max\limits_{j} a_{i,j} = \max(9, 8, 6) = 9$

2. Критерий Вальда (критерий максимина или критерий крайнего пессимизма) – $W = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$

   Ex. Для того же примера $W = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \max(1, 2, 2) = 2$ – то есть продавать дождевики или крем от загара

3. Критерий минимального риска Сэвиджа

   Def. Показатель благоприятности состояния Q_j природы называется $\beta_j = \max\limits_{i} a_{ij}$ – максимальный выигрыш при j-ом состоянии природы

Составляем матрицу рисков $R = (r_{ij})$, где $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ – недополученный выигрыш для i-ого решения при j-ом состоянии

Матрицу рисков также называют матрицей сожалений

Далее вычисляем $S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$

Ex. Для того же примера показатели благоприятности равны $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 9$. Матрица рисков равна:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = \min(4, 7, 7) = 4$ – нужно продавать полотенца

4. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

   Выбирается число $0 \leq \lambda \leq 1$ – показатель оптимизма. Далее для каждой строки вычисляется $G_i = \lambda \max\limits_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min\limits_j a_{ij}$, а затем выбираем $G = \max\limits_i G_i$

   Ex. Для того же примера пусть $\lambda = \frac{1}{2}$, тогда:
   - $G_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 5$
   - $G_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5$
   - $G_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4$

   $G = \max(5, 5, 4) = 5$ – нужно продавать крем от загара или полотенце

5. Критерий Лапласа

   Считаем, что все состояния природы равновероятны ($p_i = \frac{1}{m}$), и принимаем то решение, при котором средняя ожидаемая прибыль наибольшая: $\overline{a_i} = \frac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$, $L = \max\limits_i \overline{a_i}$

   Ex. Для того же примера:
   - $\overline{a_1} = \frac{1}{4}(1 + 4 + 5 + 9) = \frac{19}{4}$
   - $\overline{a_2} = \frac{1}{4}(3 + 8 + 5 + 2) = \frac{18}{4}$
   - $\overline{a_1} = \frac{1}{4}(4 + 6 + 6 + 2) = \frac{18}{4}$

   $L = \max\limits_i \overline{a_i} = \max\left(\frac{19}{4}, \frac{18}{4}, \frac{18}{4}\right) = \frac{19}{4}$ – нужно продавать полотенца

По совокупности критериев можно принять решение A_1

В примере выше мы могли принимать только одно решение. Допустим, что возможны смешанные стратегии – мы можем закупить товар разного вида. Матрицу можно рассматривать как матричную игру и взять оптимальную стратегию

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Удалим доминируемые столбцы и строки, получаем $A' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Получаем стратегию $P^* = (0.2, 0.8)$, цена игры $\nu = 0.2 \cdot 1 + 0.8 \cdot 4 = 3.4$

При смешанной стратегии гарантируется выигрыш больший, чем 3.4, тогда как критерий Вальда гарантирует выигрыш 2

Принятие решения в условиях риска

Пусть известны вероятности состояния природы $p_j = P(Q_j)$

1. Критерий Байеса – принимаем то решение, где средняя ожидаемая прибыль будет наибольшей

   $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j$

   Выбираем то решение, где $B = \max_i \overline{a_i}$

   Ex. $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 10 \\ -10 & 0 & 5 & 15 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $p = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)$

   - $\overline{a_1} = 0.1 \cdot (-5) + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 + 0.2 \cdot 10 = 3.5$
   - $\overline{a_2} = 3.5$
   - $\overline{a_3} = 1.2$

   Выбираем A_1 или A_2

2. Критерий минимизации риска – лучше то решение, где среднее отклонение от ожидаемого выигрыша наименьшее

   Ex. Для примера выше рассмотрим A_1 и A_2, получаем $D_1 = 16.65$ ($\sigma_1 \approx 4.1$), $D_2 = 50.25$ ($\sigma_2 \approx 7.1$)

   Лучше выбрать решение A_1, так как риск потерять большее минимален

3. Общий подход

   1. Из множества решений выделяем множество Парето по первым двум критериям
   2. $K_i = \overline{a_i} - \lambda \sigma_i$, где $0 \le \lambda \le 3$ (максимум обусловлен правилом «трех сигм»)

      Выбираем $K = \max_i K_i$

Хеджирование

Для случаев с возможность применения смешанных решений применяют другой подход

Мет. $D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X, Y)$

Наша цель – минимизировать дисперсию, то есть нужно смешивать решения с обратной корреляцией. В этом и состоит принцип хеджирования

Ex. $A = \begin{pmatrix} -50 & 150 \\ -10 & 110 \\ 120 & -20 \\ 140 & -40 \end{pmatrix}$, $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

У всех строк ожидаемая прибыль равна, но у второй строки дисперсия меньше, чем у других. Вычеркнем доминируемые первую и четвертую строки:

$$A' = \begin{pmatrix} -10 & 110 \\ 120 & -20 \end{pmatrix}$$

Получаем два решения, которые обратно коррелируют друг к другу. При смешивании получаем $P^* = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_3$

Матожидание равно $EP^* = \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 50 = 50$, дисперсия равна $DP^* = D_2 + D_3 + 2\operatorname{cov}(A_2, A_3) = \frac{1}{2}55^2 + \frac{1}{2}45^2 - 50^2 = 25$, $\sigma_{P^*} = 5$

При этом $\sigma_2 = 60$, $\sigma_3 = 70$ – отклонение смешанной стратегии намного меньше, чем по отдельности

Термин «хеджирование» происходит из фондового рынка: с целью уменьшения рисков владельцы бумаг выбирают акции компании, чья стоимость обратно коррелирует

Такие критерии применялись с давних пор. Так, например, рассуждал Блез Паскаль о Боге

Ex. Принимаем два решения: верить в Бога или не верить. Есть две ситуации: Бог есть и Бога нет

	Бог есть ($p_1 = 0.01$)	Бога нет ($p_2 = 0.99$)
Верить	∞	-1000
Не верить	0	100000

Посчитаем матожидание: $EA_1 = 0.01 \cdot \infty - 0.99 \cdot 1000 = \infty$, $EA_2 = 0 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 100000 = 99000$

С точки зрения такого рассуждения вера в Бога рациональна

Дерево решений

Если нужно принять множество решений, то использует дерево решений. Алгоритм такой (на основе критерия Байеса):

1. Рисуем дерево решений и анализируем его с конца
2. Там, где решение принимает природа, вычисляем среднюю ожидаемую прибыль
3. Там, где решение принимает мы, отсекаем ветки, где средняя ожидаемая прибыль меньше
4. В результате получаем путь с оптимальной прибылью

Ex. Нефтяная компания принимает решений бурить или не бурить скважину и заказывать или не заказывать сейсморазведку. Статистика по скважинам в данном регионе:

Типы скважин	Открытая структура грунта	Замкнутая структура грунта	Всего
Сухая	45	5	50
Маломощная	10	20	30
Богатая	5	15	20
Итого	60	40	100

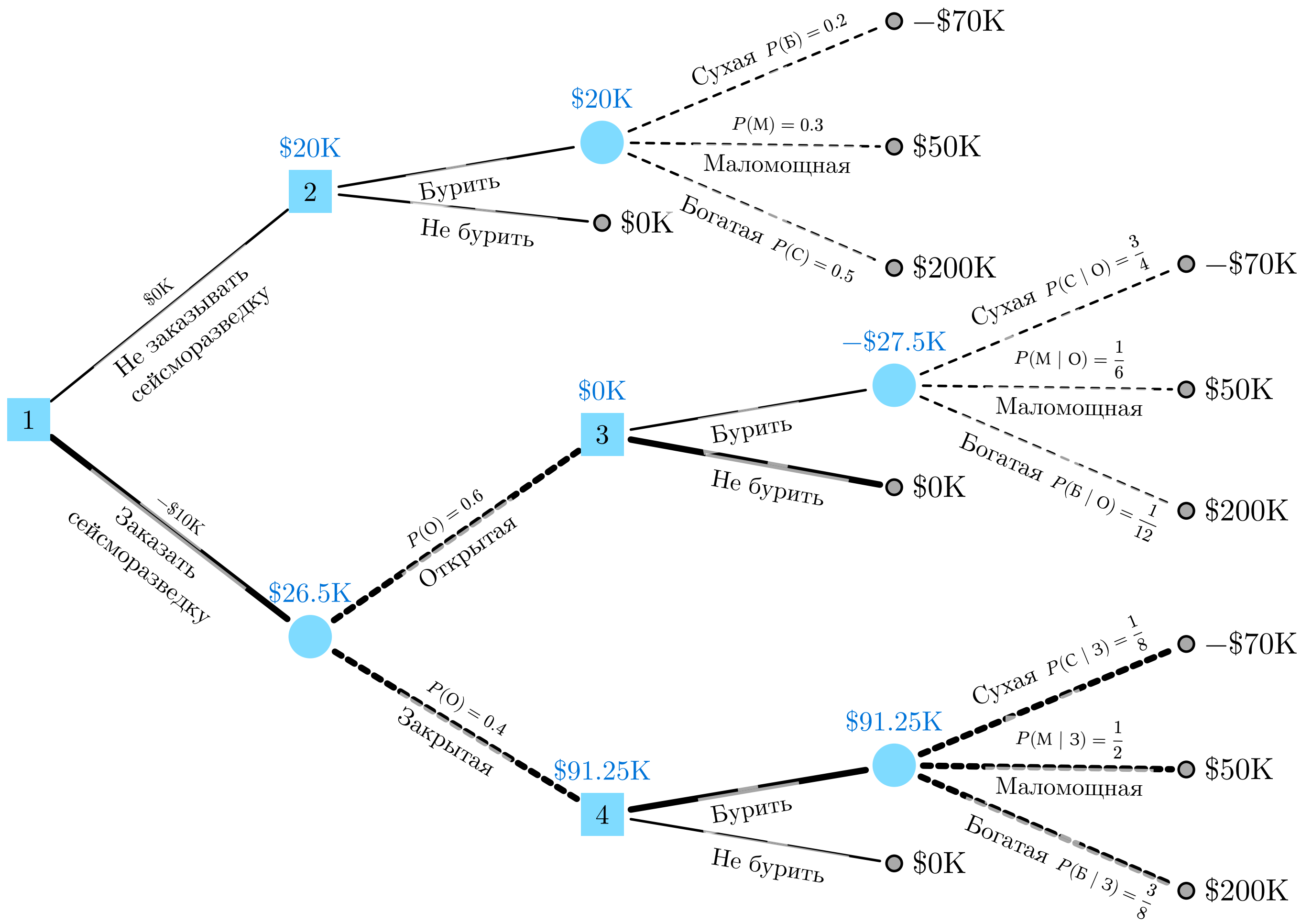
Прибыль для разных типов скважин:

Решение	Сухая	Маломощная	Богатая
Бурить	-70 тысяч долларов	50 тысяч долларов	200 тысяч долларов
Не бурить	0 тысяч долларов	0 тысяч долларов	0 тысяч долларов

Сейсморазведка стоит 10 тысяч долларов и показывает структуру грунта

Согласно статистике:

- $P(\text{Сухая}) = \frac{50}{100} = 0.5,\ P(\text{Маломощная}) = \frac{30}{100} = 0.3,\ P(\text{Богатая}) = \frac{20}{100} = 0.2$
- $P(\text{Открытая}) = 0.6,\ P(\text{Замкнутая}) = 0.4$
- $P(\text{Сухая} \mid \text{Открытая}) = \frac{3}{4},\ P(\text{Маломощная} \mid \text{Открытая}) = \frac{1}{6},$ $P(\text{Богатая} \mid \text{Открытая}) = \frac{1}{12}$
- $P(\text{Сухая} \mid \text{Закрытая}) = \frac{1}{8},\ P(\text{Маломощная} \mid \text{Закрытая}) = \frac{1}{2},\ P(\text{Богатая} \mid \text{Закрытая}) = \frac{3}{8}$



Здесь квадрат – это точка принятия решения нами, круг – точки принятия решения природы, синим шрифтом обозначена средняя ожидаемая прибыль

Вывод: заказываем сейсморазведку и на основе ее принимаем решение – не бурить при открытой и бурить при замкнутой