Лекция 9

Коалиционные игры

Def. Коалиционной игрой называется игра, где игроки могут образовывать коалиции и перераспределять свои выигрыши внутри коалиции

Поставим задачу так: как правильно поделить деньги внутри коалиции

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество игроков

Def. Коалицией называется любое непустое подмножество игроков $S \subseteq N$

Частные случаи:

1. $S = \{i\}$ – коалиция из i-ого игрока
2. $S = N$ – «большая коалиция», коалиция из всех игроков

Def. Характеристической функцией называется функция $\nu(S) \longrightarrow \mathbb{R}$, которая каждой коалиции сопоставляет максимальный выигрыш коалиции S вне зависимости от действий других игроков

Заметим, что $N = S \cup \overline{S}$, тогда игру можно рассматривать как антагонистическую игру, где игроки – это S и $\overline{S}$, тогда $\nu(S)$ – цена игры

Def. Коалиционной игрой называется пара $\{N, \nu(S)\}$, состоящая из конечного множества игроков N и функции $\nu(S) : S \longrightarrow \mathbb{R}$

Обычно предполагаем, что выполнено свойство супераддитивности: для непересекающихся S_1 и S_2 выполнено $\nu(S_1 \cup S_2) \geq \nu(S_1) + \nu(S_2)$. Смысл в том, что общая коалиция всегда может добыть выигрыш не меньше, чем две коалиции по отдельности

Получаем, что нужно разделить выигрыш $\nu(N)$ между игроками большой коалиции (или интересующей нас меньшей коалиции S)

Def. Дележом называется вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ со свойствами:

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \nu(N)$ – принцип групповой рациональности, весь выигрыш должен быть поделен между игроками
- $\alpha_i \geq \nu(\{i\})$ – принцип индивидуальной рациональности, каждый игрок в составе коалиции должен получать не меньше, чем он бы заработал вне коалиции

Также желательно, что бы:

1. Игроки получали долю согласно «заслугам» – вкладу, которому они приносят в коалицию
2. Соблюдался принцип устойчивости – игрокам должно быть невыгодно разрушать коалицию, выходя из него

   Чтобы коалиция была устойчива, нужно, что бы дележ принадлежал C-ядру

Def. Дележ α доминирует (строго) над дележом β по коалиции S, если

1. $\alpha_i > \beta_i$ для каждого $i \in S$
2. $\sum\limits_{i \in S} \alpha_i \le \nu(S)$ – коалиция может обеспечить себе такой дележ

Def. Дележ $\alpha \succ \beta$ (α доминирует над β), если найдется коалиции S, в которой α доминирует над β

Nota. Возможно так, что $\alpha \succ \beta$ по одной коалиции и $\beta \succ \alpha$ по другой

Большая коалиция будет не устойчива, если над ее дележом будет доминировать другой дележ

Def. C-ядро – множество недоминируемых дележей

Если дележ принадлежит C-ядру, то большая коалиция устойчива

Nota. Возможно, что C-ядро пустое – это означает, что большая коалиция не устойчива

Если C-ядро не пусто, то «справедливым» дележом обычно считается его геометрический центр

Th. $\alpha \in C$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i \in S} \alpha_i \ge \nu(S)$ для любой коалиции S

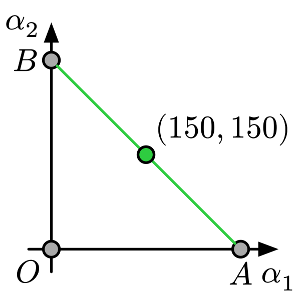
Ex. Мигель едет из Барселоны в Мадрид 600 километров на такси стоимостью 600 евро. По пути в Сарагосе к нему присоединяется Педро, стоимость поездки от Сарагосы до Мадрида – 300 евро. Как им справедливо разделить платеж?

1. Мигель предлагает разделить расходы как $(400, 200)$
2. Педро предлагает $(450, 150)$

Выигрыш – сэкономленные деньги

Формализуем игру: $N = \{1, 2\}$, $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$, $\nu(\{1, 2\}) = 300$

C-ядро задается так: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 300 \\ \alpha_1 \ge 0 \\ \alpha_2 \ge 0 \end{cases}$



Получаем отрезок AB – получившееся C-ядро

Справедливым дележом считается середину отрезка $(150, 150)$

Вывод: нужно делить α пополам, получаем расходы $(450, 150)$

Ex. Директор кафе предлагает трио музыкантов (пианист, певец, ударник) 100 долларов за вечер. Причем:

- если пианист и певец придут только вдвоем, то им заплатят 80
- пианисту и ударнику – 70
- одному пианисту в кафе – 30
- певец и ударник могут пойти в метро и заработать 50
- один певец в метро может заработать 20
- ударник в одиночку не может ничего заработать

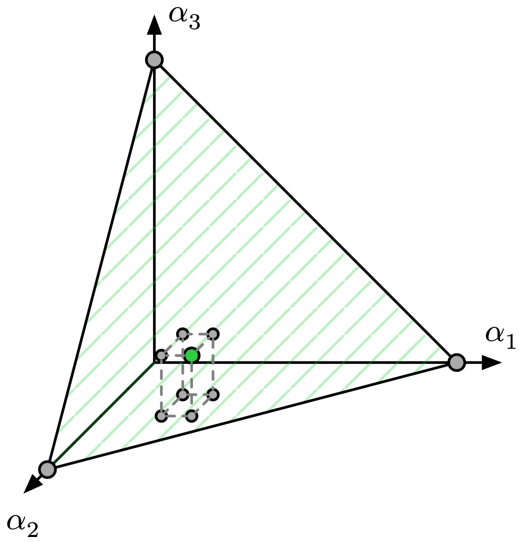
Сделаем модель: $N = \{1, 2, 3\}$, 1 – певец, 2 – пианист, 3 – ударник

- $\nu(\{1, 2, 3\}) = 100$
- $\nu(\{1, 2\}) = 80$
- $\nu(\{2, 3\}) = 70$
- $\nu(\{2\}) = 30$
- $\nu(\{1, 3\}) = 50$
- $\nu(\{1\}) = 20$
- $\nu(\{3\}) = 0$

Дележ задается так: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100 \\ \alpha_1 \geq 20, \alpha_2 \geq 30, \alpha_3 \geq 0 \end{cases}$

C-ядро задается так: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100 \\ \alpha_1 \geq 20, \alpha_2 \geq 30, \alpha_3 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 80 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 70 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 50 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100 \\ 20 \leq \alpha_1 \leq 30 \\ 30 \leq \alpha_2 \leq 50 \\ 0 \leq \alpha_3 \leq 20 \end{cases}$

Первое уравнение – это плоскость, а три неравенства задают параллелепипед



Легко заметить, что параллелепипед пересекает плоскость в точке $(30, 50, 20)$

Получаем, что трио выгодно пойти выступать в кафе, где они разделят выигрыш как $(30, 50, 20)$

Если бы параллелепипед пересекал плоскость не в вершине, в треугольнике, то справедливо выбрать центр этого треугольника. А если бы параллелепипед не пересекал плоскость, то коалиция $\{1, 2, 3\}$ считалась бы неустойчивой

Вектор Шепли

Def. Носителем кооперативной игры K называется такая коалиция K, что $\nu(S) = \nu(S \cap K)$ для любой S

Def. Игрок i называется «болваном», если $\nu(\{i\}) = 0$ и $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S)$ для любой S – игрок не зарабатывает ни сам, ни в коалиции

Носитель K – множество игроков, где исключены «болваны»

Def. Вектором Шепли называется дележ α, удовлетворяющий системе аксиом:

- A1: Свойство симметричности – доля игрока не зависит от присвоенного ему номера
- A2: Выигрыш распределяется между игроками носителя – $\sum\limits_{i \in K} \alpha_i = \nu(K) = \nu(N)$
- A3: Линейность – если $w(S) = v(S) + u(S)$ для любой S, то $\alpha_i(w) = \alpha_i(v) + \alpha_i(u)$; дележ по сумме двух игр равен сумме дележей отдельных игр

Th. Шепли. Вектором Шепли называется дележ α, определяемый следующим образом:

$$\alpha_i = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} (\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\}))$$

Доля игрока пропорциональна вкладу, который он вносит в различные коалиции, то есть это справедливый дележ по труду

Nota. Вектор Шепли не всегда принадлежит C-ядру, из-за чего коалиция неустойчива. Чтобы с этим бороться, игрокам с меньшим вкладом увеличивают выигрыш, из-за чего коалиция не разрушается

Разберем пример с трио музыкантов. Вычислим вектор Шепли:

- $\alpha_1 = \frac{1}{3} \cdot (20 - 0) + \frac{1}{6} \cdot (80 - 30) + \frac{1}{6} \cdot (50 - 0) + \frac{1}{3}(100 - 70) = \frac{100}{3}$
- $\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot (30 - 0) + \frac{1}{6} \cdot (80 - 20) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 0) + \frac{1}{3}(100 - 50) = \frac{145}{3}$
- $\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot (0 - 0) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 30) + \frac{1}{6} \cdot (50 - 20) + \frac{1}{3}(100 - 80) = \frac{55}{3}$

Получаем вектор $\left(\frac{100}{3}, \frac{145}{3}, \frac{55}{3}\right)$ или $(33.3, 48.3, 18.3)$

Ex. Рационирование по Талмуду. Три вдовы претендуют на имущество умершего мужа пропорционально приданному. Первая жена запрашивает 100 шекелей, вторая жена – 200, а третья – 300

Талмуд рекомендует делать так: если наследство 100 шекелей, то делить надо поровну $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$. Если 200, то делить надо так – $(50, 75, 75)$. Если 300 шекелей, то делить надо как $(50, 100, 150)$

Такое разделение соответствует концепции N-ядра, которая появилась в 1969 году