Лекция 8

Кооперативные игры

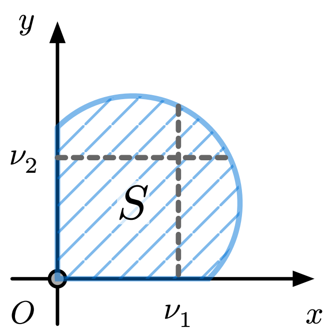
Def. Игру называют кооперативной, если все или часть игроков могут предварительно договариваться о совместных действиях

Def. Игра называется сепарабельной или без побочных действий, если игроки не могут обмениваться выигрышами. Обычно кооперативные игры проходят без побочных платежей

Рассмотрим кооперативную игру двух игроков. Введем обозначения:

- H_1 – функция выигрышей первого игрока
- H_2 – функция выигрышей второго игрока
- ν_1 – выигрыш, который может позволить первый игрок, если он вступает в переговоры
- ν_2 – выигрыш, который может позволить второй игрок, если он вступает в переговоры
- Множество $S = (H_1, H_2)$ – множество совместных выигрышей, который они могут обеспечить, если вступят в переговоры

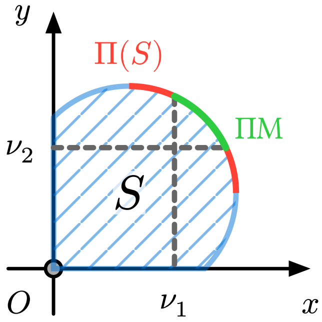
  Как правило, это выпуклое замкнутое ограниченное множество



Игрокам нужно договориться о точке в множестве S, которая показывает их совместные действия и намерения

Точка (ν_1, ν_2) в S называется точкой угрозы

Ясно, что игрокам нужно переговариваться, чтобы $H_1 \geq \nu_1$, $H_2 \geq \nu_2$. Такую точку назовем арбитражной. Также ясно, что арбитражная точка должна находится в множестве Парето $\Pi(S)$, в противном случае найдется точка, в которой выигрыш одного игрока будет больше



Из-за этих условий арбитражная точка будет находится на пересечении $\text{ПМ} = \Pi(S) \cap \{H_1 \geq \nu_1, H_2 \geq \nu_2\}$ этих множеств

Вопрос – как ее выбрать?

Арбитражная схема Нэша

Def. Арбитражным решением Нэша называется точка (H_1^*, H_2^*), удовлетворяющая аксиомам:

N1: $H_1^* \geq \nu_1$ и $H_2^* \geq \nu_2$ – принцип индивидуальной рациональности

N2: $(H_1^*, H_2^*) \in S$ – допустимость решения

N3: $(H_1^*, H_2^*) \in \Pi(S)$ – Парето-оптимальность (или групповая рациональность)

N4: Если S - симметрична ($(x, y) \in S \Longrightarrow (y, x) \in S$) и $\nu_1 = \nu_2$, то $H_1^* = H_2^*$ – симметричность, если игроки в равных условиях, то и выигрыши должны быть равными

N5: Независимость от линейного преобразования: если S' получается из S с помощью линейного преобразования $\begin{cases} H_1' = aH_1 + b \\ H_2' = cH_2 + d \end{cases}$ и точка (H_1^*, H_2^*) – арбитражное решение в S, то $(aH_1^* + b, cH_2^* + d)$ – решение в другом множестве

N6: Независимость от посторонних альтернатив: если $(H_1^*, H_2^*) \in S \subset S'$ и (H_1^*, H_2^*) – решение в S', то (H_1^*, H_2^*) – решение в игре с S

Th. Нэша. Если множество S – выпуклое ограниченное замкнутое множество, то существует единственное решение арбитражной схемы Нэша, которое является максимумом функции $u(H_1, H_2) = (H_1 - \nu_1) \cdot (H_2 - \nu_2)$

Здесь $(H_1 - \nu_1)$ – дополнительный выигрыш первого игрока из-за участия в переговорах, $(H_2 - \nu_2)$ – дополнительный выигрыш второго игрока, а $u(H_1, H_2)$ – общая полезность

Nota. Обобщая на n игроков, получаем $u(H_1, ..., H_n) = (H_1 - \nu_1)(H_2 - \nu_2) \cdot ... \cdot (H_3 - \nu_3) = \Pi_{i=1}^{n}(H_i - \nu_i)$

С середины 1950-ых годов по такой схеме работали американские компании, чтобы получать максимальную выгоды от победы в государственных тендерах

Биматричные кооперативные игры

Th. В биматричной игре S - выпуклый многоугольник, натянутый на вершины (H_1, H_2) выигрышей игроков при применении ими чистых стратегий

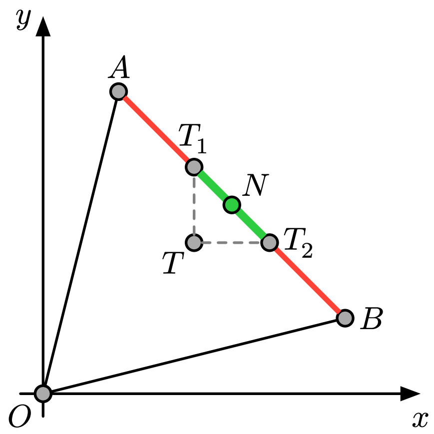
Следствие: любая биматричная кооперативная игра имеет ровно одну арбитражную точку Нэша

Ex. Семейный спор. Муж и жена решают, куда пойти в субботу: на футбол или балет

$$\text{М} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ж} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем v_1 и v_2, рассматривая каждую матрицу как матричную игру. Для М седловая точка – $\nu_1 = 2$, стратегия – $P^* = (1, 0)$ (идти на футбол), а для Ж седловая точка – $\nu_2 = 2$, стратегия – $Q^* = (0, 1)$ (идти на футбол)

Изобразим область S совместных выигрышей:



$\text{ПМ} = \Pi(S) \cap \{H_1 \geq \nu_1, H_2 \geq \nu_2\} = [T_1, T_2]$

Теперь максимизируем функцию $u(H_1, H_2) = (H_1 - \nu_1)(H_2 - \nu_2)$

Уравнение отрезка AB можно представить как $pA + (1-p)B = p(1, 4) + (1-p)(4, 1) = (4 - 3p, 1 + 3p)$

$u(H_1, H_2) = u(p) = (4 - 3p - 2)(1 + 3p - 2) = (2 - 3p)(3p - 1) = 9p^2 + 9p - 2$

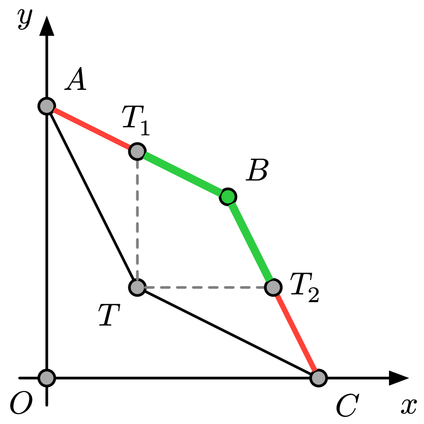
Максимум этой функции находится при $p = \dfrac{1}{2}$, то есть на середине отрезка AB

Получаем $(H_1^*, H_2^*) = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B$, то есть муж и жена при помощи жребия совместно решают, куда пойти вместе. Тогда совместный выигрыш увеличивается на 0.5

Ex. Дилемма двух заключенных.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$



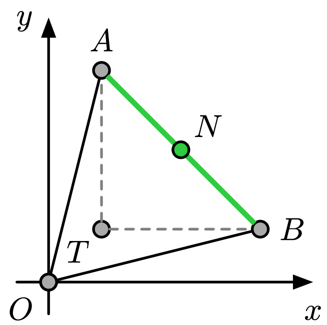
Здесь видно, что область симметрична, поэтому согласно аксиоме N4 арбитражной точкой будет точка $B(2, 2)$ – игроки должны вести себя мирно

Точка $T(1, 1)$ является точкой угрозой

Ex. Перекресток. На нерегулируемом перекрестке две машины, у каждой есть две стратегии: ехать или остановиться

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$



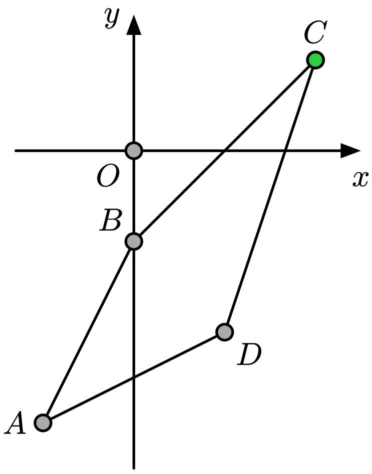
ПМ $= AB = \Pi(S)$, в силу симметрии получаем арбитражную точку $N = (1.25, 1.25) = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B$

Вывод: поставить светофор на перекрестке с равной продолжительностью для каждого потока

Ex. Студент (1-ый игрок) готовится к экзамену: стратегия A_1 – он готовится (Г), стратегия A_2 – не готовится (Н). Стратегии преподавателя (2-ого игрока): B_1 – принять экзамен (П), B_2 – не принять (Н)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Для такой игры $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = -1.6$



Здесь очевидно, что наилучшая точка для обоих сторон – это C

Рассмотрим вырожденные случаи:

- Матричная антагонистическая игра $A, B = -A$ – здесь интересы прямо противоположны, $S : y = -x$, точка Нэша – это точка угрозы
- Матричная игра $A, B = A$; здесь множество Парето – это верхний конец отрезка $S : y = x$