

Лекция 7

Неантагонистические игры

Def. Игра, разрешима по доминированию, если после исключения строго доминируемых стратегий останется лишь одна ситуация или несколько, но равноценных для всех игроков

Биматричные игры

Def. Биматричной игрой называется конечная игра двух лиц

Пусть первый игрок имеет стратегии A_1, \dots, A_n , а второй игрок B_1, \dots, B_m . Если первый игрок выбрал стратегию A_i , а второй – B_j , то возникает ситуация $S = (A_i, B_j)$. Обозначим выигрыш первого игрока a_{ij} , а второго – b_{ij}

Тогда игра задается двумя платежными матрицами $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$

Nota. Если игра матричная, то $B = -A$

Ex. Дилемма двух заключенных. Пусть в камере сидят двое заключенных, каждый из которых может вести себя мирно или агрессивно

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Данная игра разрешима по доминированию – стратегия вести себя агрессивно строго доминирует над стратегией вести себя мирно

В результате пришли к ситуации, где каждый должен вести себя агрессивно и получать выигрыш 1

Заметим, что вести себя мирно выгодно для каждого из двух игроков – каждый получить по 2. Тем не менее данная ситуация не является равновесной; даже если они заключили соглашение, то одному из игроков будет выгодно отклониться от мирной стратегии

Ситуация, в которой оба агрессивны, считается равновесной

Равновесие по Нэшу

Пусть $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – смешанная стратегия первого игрока, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ – второго

Тогда средний ожидаемый выигрыш игрока первого равен $K_1(P, Q) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j$

Def. Ситуация (P^*, Q^*) называется равновесной по Нэшу, если для всех смешанных стратегий P и Q выполнено неравенство

$$H_1(P, Q^*) \leq H_1(P^*, Q^*) \text{ и } H_2(P^*, Q) \leq H_2(P^*, Q^*)$$

Здесь каждому игроку невыгодно менять свое поведение при условии, что другой его придерживается

Def. В общем случае для n игроков ситуация $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ называется равновесием по Нэшу, если для любого i справедливо $H_i(S_i, S_{-i}) \leq H_i(S_i^*, S_{-i})$, где S_i – стратегия i -ого игрока, а S_{-i} – набор оптимальных стратегий других игроков

Th. Нэша. В конечной игре (где каждый имеет конечное число стратегий) существует хотя бы одна ситуация равновесия в смешанных стратегиях

Критерий равновесия. Ситуация (P^*, Q^*) является равновесием по Нэшу, если для любых чистых стратегий A_i, B_j выполнены неравенства $H_1(A_i, Q^*) \leq H_1(P^*, Q^*)$ и $H_2(P^*, B_j) \leq H_2(P^*, Q^*)$

То есть достаточно проверить, что каждому из двух игроков невыгодно поменять свою стратегию на одну из чистых

Th. Если A_i, B_j – активные стратегии игроков в ситуации равновесия (P^*, Q^*) , то $H_1(A_i, Q^*) = H_1(P^*, Q^*)$ и $H_2(P^*, B_j) = H_2(P^*, Q^*)$

В качестве следствия получаем алгоритм решения:

1. Смотрим, будет ли игра разрешима по доминированию. Если да, то получим одну точку равновесия
2. Если нет, то:
 1. Ищем точки равновесия в чистых стратегиях. Точка (i, j) будет равновесием, если a_{ij} будет максимальным в своей строке, а b_{ij} будет максимальным в своем столбце
 2. Ищем точки равновесия в смешанных стратегиях, решив две системы уравнений

Для матриц $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ и для стратегий $P^* = (p_1, p_2)$ и $Q^* = (q_1, q_2)$ системы такие:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ a_2 p_1 + c_2 p_2 = \nu_2 \\ b_2 p_1 + d_2 p_2 = \nu_1 \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ a_1 q_1 + c_1 q_2 = \nu_1 \\ b_1 q_1 + d_1 q_2 = \nu_2 \end{cases}$$

Nota. В неантагонистических играх можно удалять только строго доминируемые стратегии

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Здесь в A вторая строка доминирует над первой, а в B второй столбец слабо доминирует над первым. Остались матрицы $A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Получили точки равновесия (A_2, B_2) и (A_3, B_2) , выигрыши – $(2, 1)$

Но матрицы можно упростить и по-другому: вторая строка слабо доминирует над третьей, тогда первая стратегия второго игрока будет слабо доминировать над второй, получим $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и выигрыши $(1, 1)$

Выигрыш изменился, поэтому удалять слабо доминируемые нельзя

Ех. Студент (1-ый игрок) готовится к экзамену: стратегия A_1 – он готовится (Г), стратегия A_2 – не готовится (Н). Стратегии преподавателя (2-ого игрока): B_1 – принять экзамен (П), B_2 – не принять (Н)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Игра не является разрешимой по доминированию
2. В чистых стратегиях есть две точки равновесия: $(Г, П)$ (выигрыш – $(2, 1)$) и $(Н, Н)$ (выигрыш – $(0, -1)$)

В смешанных стратегиях у первого игрока стратегия $P^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, у второго – $Q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(\begin{pmatrix} 2, -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, -1 \end{pmatrix}\right)$; выигрыш – $(0.5, -1.4)$

Nota. Выигрыши игроков в этих точках разные, но первая ситуация доминирует над остальными, поэтому, если бы игроки заключали соглашение, студент готовился бы к экзамену, а преподаватель готовился принять

Ех. Муж и жена решают, куда пойти в субботу: на футбол или балет

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Ж = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Эта игра разрешима по доминированию – первая стратегия строго доминирует у мужа, а у жены – вторая. Получаем точку равновесия: муж идет на футбол, а жена на балет. Выигрыши игроков – $(2, 2)$

Ех. Голуби и ястребы (или перекресток, или наследство). Допустим, что игрок в популяции может придерживаться ястребиного поведения (то есть отбирать еду, драться) или голубиного поведения (то есть уступать, не влезать в драки).

Рассмотрим выигрыши для двух игроков

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Игра не разрешима по доминированию. В чистых стратегиях точки равновесия – это (Я, Г) и (Г, Я) (выигрыши – (2, 0) и 0, 2)

В смешанных стратегиях:

- $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \nu_2 = \frac{2}{3}$
- Симметрично $Q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \nu_1 = \frac{2}{3}$

Пусть имеется птичья популяция, где p – доля агрессивных птиц. Если игрок ведет себя агрессивно по-ястребиному, то его выигрыш будет $H(\text{Я}) = -2p + 2(1 - p) = 2 - 4p$. Если мирно, то $H(\text{Г}) = 0p + 1(1 - p) = 1 - p$

$$H(\text{Я}) > H(\text{Г}) \Rightarrow 2 - 4p > 1 - p \Rightarrow p < \frac{1}{3}$$

При $p < \frac{1}{3}$ выгодно вести себя как ястреб, а при $p > \frac{1}{3}$ выгодно быть голубем

Спустя несколько поколений популяция придет к равновесию, где треть из нее будет ястребами, а две трети – голубями

Теория игр оказалась полезной для обоснования эволюции и поведения среди популяции животных и позволила превратить качественные идеи (такие, как «выгодно быть альтруистом») в математические модели