Лекция 6

Многокритериальные задачи оптимизации

Пусть требуется выбрать решение из области D по k критериям. Лучше будет то решение, критерии которого наибольшие

Def. Пусть имеются два решения $X = (x_1, ..., x_k) \in D$ и $Y = (y_1, ..., y_k) \in D$, где x_i, y_i – значения i-ого критерия при этих решениях. Решение X доминирует Y, если $x_i \geq y_i$ для всех i и существует l такое, что $x_l > y_l$ (то есть по всем критериям решение X не хуже решения Y, а по одному хотя бы лучше)

Ясно, что нет смысла рассматривать доминируемые решения

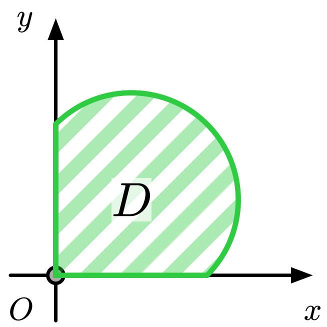
Def. Множеством Парето называется множество недоминируемых решений

Очевидно, что итоговое решение следует выбрать из этого множества

Ex. 1. $D = \{(0,0,0), (2,-1,3), (3,3,3), (4,0,4)\}$

Здесь доминируемые решения – решения 1 и 2, поэтому множество Парето $\Pi = \{(3,3,3), (4,0,4)\}$

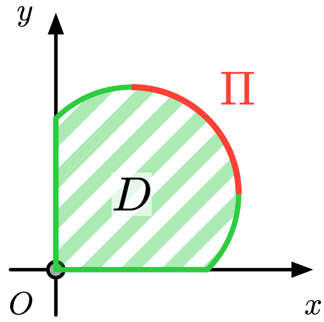
Ex. 2. Область D, ограниченная дугой и осями



Здесь любая внутренняя точка будет доминируемой, так как найдется окрестность, в которой найдется решение лучше

Самая верхняя и самая правая точки будут доминировать, поэтому они будут входить в множество Парето

Если область D выпуклая, то множеством Парето будет ее граница между самой верхней и самой правой точками



Множество Парето в теории игр

Пусть в игре участвуют N игроков, функции выигрыши которых $H_1, H_2, ..., H_n$. Цель каждого игрока – максимизировать свой выигрыш, по существу имеем многокритериальную задачу оптимизации. Область D – множество всех возможных ситуаций игры

Допустим, что игра кооперативная, то есть перед началом игры игроки пытаются прийти к устраивающему всех соглашению

Пусть X, Y – два соглашения, $(H_1(x), ..., H_n(x))$ и $(H_1(y), ..., H_n(y))$ – выигрыши при данном соглашении

Если $H_i(x) \geq H_i(y)$, и существует l, для которого $H(x) > H(y)$, то все игроки предпочтут решение X, а Y рассматривать не будут

Таким образом, множество ситуаций, из которых они будут выбирать соглашение, будет множеством Парето

Модель натурального обмена

Пусть отсутствует денежная система, каждый игрок имеет некоторое число товара, и на рынке каждый пытается обменять товар наиболее выгодным для себя образом

Пусть $H_i(X)$ – выигрыш i-ого игрока при конечном размене X

Допустим, что игроки собрали всю возможную информацию о вариантах обмена и в определенный момент совершили конечный обмен

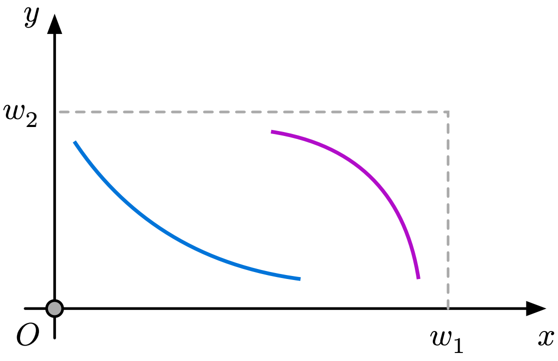
Обмен X доминирует над обменом Y, если $H_i(X) \geq H_i(Y)$, и существует l такое, что $H_l(X) > H_l(Y)$

Ясно, что конечный обмен будет находится в множестве Парето, так как в противном случае всем будет выгодно еще раз поменяться

Доказано, что при большом рынке и при длительной игры пропорции между товарами при обмене стремятся к константами, что можно считать эквивалентом денег. И таким образом, денежная система возникает неизбежно

Def. Ящик Эджворта – модель обмена двух игроков двумя товарами

Пусть $X = (x, y)$ – число товаров у первого игрока в данный момент времени, $W = (w_1, w_2)$ – число всех товаром на руках у игроков, тогда $Y = W - X = (w_1 - x, w_2 - y)$ – число товаров у второго игрока



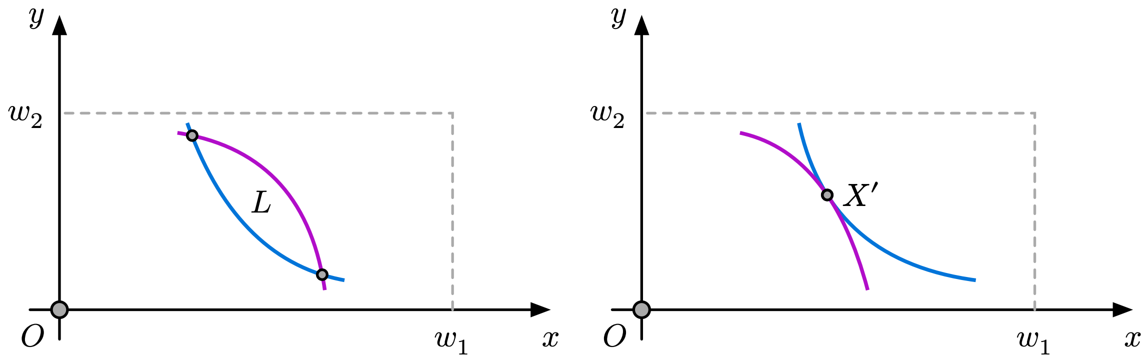
Пусть $H_1(x, y)$ – полезность данного набора для первого игрока, а $H_2(w_1 - x, w_2 - y)$ – полезность оставшегося набора для второго игрока

Построим линии уровня $H_1(x, y) = C$ и $H_2(w_1 - x, w_2 - y) = C'$ – линии безразличия

Так как сбалансированные наборы товаров всегда лучше, то кривая безразличия первого игрока будет выпукла вниз, а второго – вверх

При увеличении констант линии уровня будут сдвигаться друг к другу и в какой-то момент пересекутся

Ясно, что обмен будет происходить до тех пор, пока между кривыми безразличия в области L не будет ни одной точки обмена



Если товары бесконечно делимы (например, сахарный песок), то обмен будет происходит до тех пор, пока область L не окажется пустой. Оптимальной точкой обмена будет точка касания X' этих кривых