Лекция 5

Стратегические игры

Nota. Стратегической игрой называется игра с совершенной информацией

Один из вариантов найти оптимальную стратегию следующий: находим условие Cond такое, что если в этом состоянии находится проигрывающая сторона, то при любой ходе она его нарушает, а выигрывающая сторона на следующем ходе его может восстановить

Ex. На столе n спичек, каждый игрок берет 1 или 2 спички, проигрывает тот, кто берет последнюю

При $n = 1$ проигрывает первый игрок. Здесь условие $\mathrm{Cond} : n \underset{\bmod 3}{\equiv} 1$

Если $n \underset{\bmod 3}{\equiv} 1$, то проигрывает первый игрок - второй игрок способен взятием спичек поддерживать это условие. Если $n \underset{\bmod 3}{\equiv} 0$, то выигрывает первый игрок. При $n \underset{\bmod 3}{\equiv} 2$ первый игрок может своим ходом сделать условие $n \underset{\bmod 3}{\equiv} 1$ для второго игрока, вызывая его проигрыш

Ex. Игра «Ним»: имеются k кучек, в каждой из которых некоторое количество камней, на каждом ходе один из игроков может забрать любое число камней из любой кучки. Выигрывает тот, кто берет последний камень

В простейшем случае при $k = 1$ выигрывает тот, у кого ход в данный момент. При $k = 2$, где в первой кучке 1 камень, а в третьей 3 камня, выигрывает первый игрок, взяв два камня из второй кучке

Запишем число камней в каждой кучке в двоичной системе и напишем эти числа столбиков, начиная с меньшего:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \end{array}$$

При $k = 3$, где в первой - 1 камень, во второй - 3 камня, а в третьей - 5 камней, получаем:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 101 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 10 \end{array}$$

Заметим, что сумма цифр в каждом столбце нечетная. Первый игрок берет из большей кучки число камней таким образом, чтобы сумма цифр в каждом столбце была четной. В этом примере нужно взять из третьей кучи 3 камня

Второй игрок не может сохранить условие четности. Получаем условие Cond – сумма цифр в каждом столбце четная. Проигрывает тот, кто находится в такой ситуации.

Если следующим ходом игрок нарушает условие, то другой игрок может его восстановить

Ex. Игра «Мариенбад»: есть 4 кучки, где 1, 3, 5 и 7 камней соответственно:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 101 \\ 111 \end{array}$$

Для первого игрока выполняется условие Cond, поэтому он проигрывает

Парадокс Кондорсе

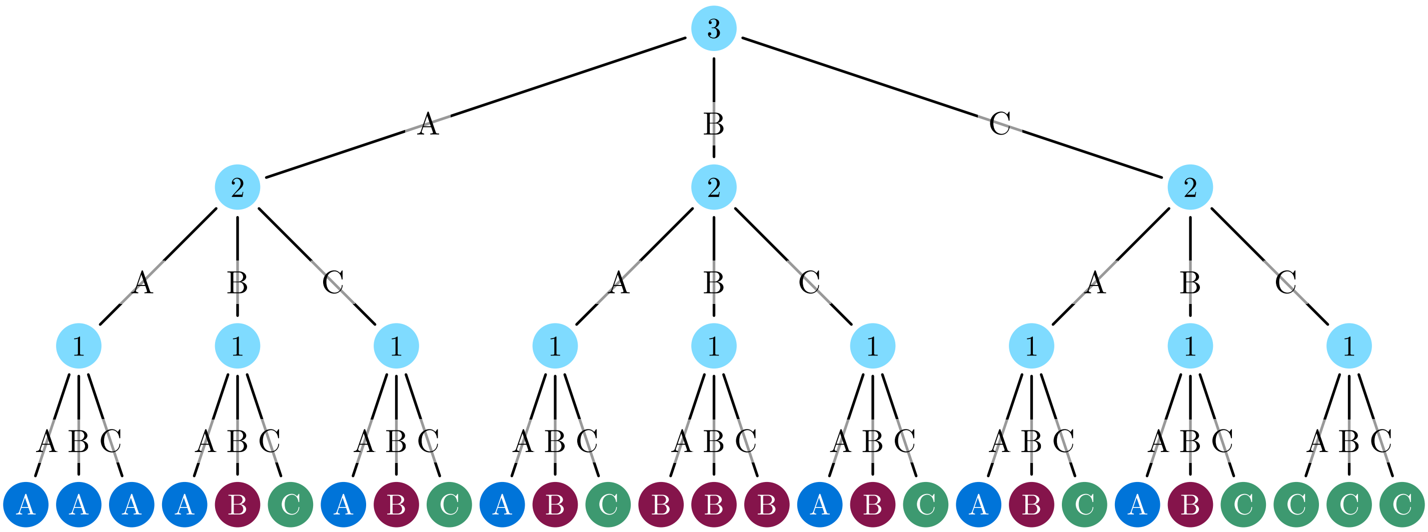
Три игрока с помощью тайного голосования голосуют за одного из трех кандидатов: A, B и C

Если у одного из кандидатов как минимум два голоса, то он выбирается. Если за число голосов поровну, то будет выбран кандидат, за которого проголосовал первый игрок

Полезность кандидатов определена следующим образом:

- $H_1(A) > H_1(B) > H_1(C)$
- $H_2(C) > H_2(A) > H_2(B)$
- $H_3(B) > H_3(C) > H_3(A)$

Представим выборы в виде дерева. Так как последовательность неважна, то пусть первый ход делает третий игрок, затем второй и первый



Выбор тайный, то игра не с совершенной информацией. Для игрока неразличимы хода, поэтому вершины можно объединить в информационное множество – считаем их за новые мегавершины

Алгоритм Куна применить нельзя, поэтому думаем, как будут ходить игроки. Для первого игрока во всех ситуация стратегия выбора A слабо доминирует над B и C, поэтому он будет выбирать A

Второй игрок понимает, что первый проголосует за A, поэтому проголосует за лучшего для себя кандидата C

Третий игрок понимает, что первый выбрал A, а второй выбрал C, поэтому проголосует за C – худшего кандидата для первого игрока

Парадокс в том, что, несмотря на преимущество первого игрока, будет выбран худший для него кандидат. Объясняется это тем, что преимущество первого дает информацию второму и третьему о том, как будет действовать первый игрок

Нормализация игры

Th. Любая игра в развернутой форме может быть приведена к игре в нормальной форме

Мет. Игра в развернутой форме представлена в виде дерева, где вершины – это ходы игрока, ребра – варианты игры, путь из начальной вершины к конечной называется партией и соответствует ходу игры при столкновении стратегий игроков

Мет. Игра в нормальной форме – игра, в которой N игроков, заданы их стратегии и функции выигрышей

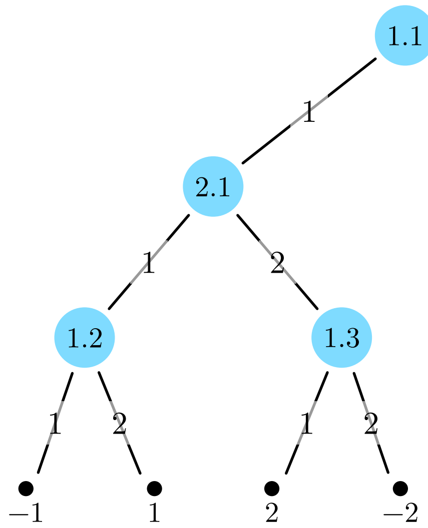
Алгоритм нормализации будет следующим:

- Для игры с совершенной информацией
    1. Пронумеруем вершины i-ого игрока в дереве как $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$
    2. Пронумеруем ребра из каждой вершины как $l\left(X_{ij}\right)$ – ребро из вершины X_{ij}
    3. Каждый игрок до начала игры решает, какой ход ему сделать, то есть путь $U_i(l(X_{i1}), l(X_{i2}), \ldots, l(X_{ik}))$ – получили игру в нормальной форме, которая происходит одномоментно

  Здесь каждый игрок составляет план игры независимо от других, затем игроки одномоментно предъявляют свои планы. Получается игровая ситуация, в которой выигрыш каждого игрока известен

- Для игры с несовершенной информацией неразличимые для игрока вершины объединяем в информационное множество, считаем их новыми вершинами, далее алгоритм аналогичен

Ex. Антагонистическая игра с совершенной информацией



Нормализуем эту игру. В результате получим матричную игру, так как игра антагонистическая. Закодируем стратегии игроков кортежами:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1,1)\\(1,1,2)\\(1,2,1)\\(1,2,2)\\(2,1,1)\\(2,1,2)\\(2,2,1)\\(2,2,2)\end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(2,1)&(2,2)&(2,3)\end{array}\\
\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2\\
-1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2\\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2\\
1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3
\end{pmatrix}\end{array}$$

Упрощаем матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ (1,2,1)\\(2,1,1)\end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(2,1)&(2,2)&(2,3)\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3
\end{pmatrix}\end{array}$$

Здесь стратегии $(1,2,1)$ и $(1,1)$ являются оптимальными.Получаем путь (1.1, 2.1, 2.2), цена игры – 1

Ex. Такая же игра, но с несовершенной информацией

Здесь в дереве вершины 2.1 и 2.2 не объединяются в информационное множество, так как у второго игрока разное число возможных ходов, поэтому он знает ход первого. У первого же игрока сокращается число стратегий до 4. Получаем:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\\(1,2)\\(2,1)\\(2,2)\end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(2,1)&(2,2)&(2,3)\end{array}\\
\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2\\
1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3\\
-3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3
\end{pmatrix}\end{array}$$

Упрощаем:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} (1,1) & (2,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получаем стратегии $P' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, цена игры $\nu = 0$

Первый игрок должен ходить налево, а потом с равном вероятностью налево или направо. Второй игрок с вероятностью $\frac{2}{3}$ идет направо и с вероятностью $\frac{1}{3}$ идет налево