Лекция 3

Аффинное правило

Th. Пусть имеется две матричных игры, заданные матрицами A и B одного размера, причем элементы матрицы $b_{ij} = ka_{ij} + C, k > 0$. Тогда оптимальные стратегии в этих играх совпадают, а цена игры $\nu_B = k\nu_A + C$

Пусть $H_A(P, Q)$ – средний ожидаемый выигрыш в первой игре при выбранных стратегиях P и Q. Аналогично для $H_B(P, Q)$

В силу линейности математического ожидания $H_B(P, Q) = kH_A(P, Q) + C$

Если P^* и Q^* – оптимальные стратегии для игры A, то по определению $H_A(P, Q^*) \le H(P^*, Q^*) \le H_A(P^*, Q)$ для любых P, Q

Равносильно $H_B(P, Q^*) = kH_A(P, Q^*) + C \le kH(P^*, Q^*) + C \le kH_A(P^*, Q) + C = H_B(P^*, Q)$ для $k > 0$ и любых P^*, Q^*

$\nu_B = H_B(P^*, Q^*) = kH_A(P^*, Q^*) + C = k\nu_A + C$

Задачи линейного программирования

Def. Задачей линейного программирования называется задача оптимизации, в которой целевая функция линейная и все ограничения также являются линейным равенствами или неравенствами

Здесь слово «программирование» (programming) имеет смысл планирования

Ex. Производственная задача: пусть предприятие может выпускать три вида продукции, рыночная цена одной единицы продукции равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. При производстве тратятся три вида ресурсов

При производстве одной единицы продукции первого вида расходуются a_{11} единиц сырья первого типа, a_{21} второго типа и a_{31} третьего типа. Соответственно a_{12}, a_{22}, a_{32} для второго вида продукции и a_{13}, a_{23}, a_{33} для третьего вида

Всего в наличии b_1 единиц сырья первого типа, b_2 второго типа, b_3 третьего типа

Цель – получить больше прибыли

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество единиц каждого вида

Тогда прибыль равна $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow \max$. Но при этом у нас есть условия:

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$

- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_1$
- $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_1$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ex. Задача о диете: пусть рацион можно составлять из комбикормов трех видов. Стоимости комбикормов равны c_1, c_2 и c_3 соответственно

Первый комбикорм содержит a_{11} калорий, второй – a_{21}, третий – a_{31}; первый комбикорм содержит a_{12} микроэлементов, второй – a_{22}, третий – a_{32}; первый комбикорм содержит a_{13} антибиотиков, второй – a_{23}, третий – a_{33}

Требуется составить рацион наименьшей стоимости такой, что бы было не менее b_1 калорий, ровно b_2 микроэлементов и не более b_3 антибиотиков

Пусть x_1 – число кг комбикорма первого вида, x_2 – второго, x_3 – третьего

Тогда стоимость равна $f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow \min$

Условия формируются так:

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1$
- $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_1$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ex. В три магазина завозится товар с трех баз. Стоимость перевозки с i-ой базы в j-ый магазин одной единицы товара равна c_{ij}

На первой базе в наличии a_1 товара, на второй – a_2, на третьей – a_3. Первый магазин требует b_1 товара, второй – b_2, третий – b_3

Пусть x_{ij} – количество товара, перевозимое из i-ой базы в j-ый магазин

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_{11}	c_{21}	c_{31}
b_2	c_{12}	c_{22}	c_{32}
b_3	c_{13}	c_{23}	c_{33}

Тогда целевая функция равна $f(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{33}x_{33} \longrightarrow \min$ при условиях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq a_3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Такие задачи появились во время высадки в Нормандию, когда нужно было планировать логистику критически важные поставок. До этого в 1938 году русский математик Л. В. Кантерович наткнулся на задачу по составлению наилучшего плана загрузки лущильных станков, после чего опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства»

Позже в 1949 американский математик Джордж Данциг разработал метод решения задач линейного программирования – симплекс-метод. На этом курсе не будут рассматриваться методы решения, так как прикладные задачи включают тысячи условия, которые могут быть обработаны современными статпакетами

Def. Задача линейного программирования называется канонической, если:

1. требуется найти максимум целевой функции $f(x_1, ..., x_n) \longrightarrow \max$
2. все ограничения выражаются со знаком меньше либо равно:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$
3. на все переменные действует условия неотрицательности $x_i \geq 0$

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить двойственную: $g(y_1, ..., y_m) = b_2y_2 + ... + b_my_m \longrightarrow \min$ при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1 \geq 0 \\ \vdots \\ y_n \geq 0 \end{cases}$$

Основные теоремы линейного программирования:

Th. 1. Область допустимых решений представляет выпуклый многогранник, а оптимальное решение лежит в одной из его вершин

Th. 2. Если X^* и Y^* – оптимальные решения двойственных задач, то значения целевых функций совпадают $f(X^*) = g(Y^*)$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица игры, причем известно, что цена игры $\nu > 0$. Пусть $P^* = (p_1, ..., p_n)$ и $Q^* = (q_1, ..., q_m)$ – оптимальные стратегии

Цель первого игрока – максимизировать выигрыш:

$$H(P^*,Q^*)=\nu\longrightarrow \max \text{ при условиях } \begin{cases} p_1+...+p_n=1\\ \sum_{i=1}^n a_{ij}p_i\geq\nu \quad \forall 1\leq j\leq m\\ \qquad p_i\geq 0 \quad \forall 1\leq i\leq n\end{cases}$$

А цель второго – минимизировать проигрыш:

$$H(P^*,Q^*)=\nu\longrightarrow \min \text{ при условиях } \begin{cases} q_1+...+q_m=1\\ \sum_{j=1}^m a_{ij}q_j\leq\nu \quad \forall 1\leq i\leq n\\ \qquad q_j\geq 0 \quad \forall 1\leq j\leq m\end{cases}$$

Поделим все ограничения на цену игры (так как $\nu>0$, знаки неравенства не изменятся)

$$\begin{cases} \frac{p_1}{\nu}+...+\frac{p_n}{\nu}=\frac{1}{\nu}\\ \sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{p_i}{\nu}\geq 1 \quad \forall 1\leq j\leq m\\ \qquad \frac{p_i}{\nu}\geq 0 \quad \forall 1\leq i\leq n\end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{q_1}{\nu}+...+\frac{q_m}{\nu}=\frac{1}{\nu}\\ \sum_{j=1}^m a_{ij}\frac{q_j}{\nu}\leq 1 \quad \forall 1\leq i\leq n\\ \qquad \frac{q_j}{\nu}\geq 0 \quad \forall 1\leq j\leq m\end{cases}$$

Обозначим за $x_i=\dfrac{p_i}{\nu}$, $y_j=\dfrac{q_j}{\nu}$

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=\frac{1}{\nu}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^m y_j=\frac{1}{\nu}$

Если $v\longrightarrow\max(\text{или}\min)$, то $\dfrac{1}{\nu}\longrightarrow\min(\text{или}\max)$, в результате получаем две двойственные задачи линейного программирования:

1-ый игрок

$$f(x_1,...,x_n)=x_1+...+x_n\longrightarrow\min$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\geq 1 \quad \forall 1\leq j\leq m\\ \qquad x_i\geq 0 \quad \forall 1\leq i\leq n\end{cases}$$

2-ой игрок

$$g(y_1,...,y_m)=y_1+...+y_m\longrightarrow\max$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j\leq 1 \quad \forall 1\leq i\leq n\\ \qquad y_j\geq 0 \quad \forall 1\leq j\leq m\end{cases}$$

Решив эти двойственные задачи, получаем $X^*=(x_1,...,x_n)$, $Y^*=(y_1,...,y_m)$. Тогда цена игры равна $\nu=\dfrac{1}{f(X^*)}=\dfrac{1}{g(Y^*)}$, оптимальные стратегии равны $P^*=\nu X^*$, $Q^*=\nu Y^*$

Ex. $A=\begin{pmatrix}-4&0&3&-3&4\\2&-3&1&4&2\\-1&1&3&-2&6\end{pmatrix}$

Упростим матрицу, убрав доминируемые стратегии: $A'=\begin{pmatrix}2&-3&4\\-1&1&-2\end{pmatrix}$

Чтобы гарантированно цена игры была неотрицательной, прибавим к элементам 3 (при этом соблюдается аффинное правило): $A''=\begin{pmatrix}5&0&7\\2&4&1\end{pmatrix}, \nu''>0$

Составим две задачи линейного программирования:

1-ый игрок

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2\longrightarrow\min$$

2-ой игрок

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3\longrightarrow\max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 0x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ 7x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 0y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

симплекс метод вручную, матпакет

При их решении, например, с помощью Excel получили:

- $x_1 = 0.10714, x_2 = 0.25, f(x_1, x_2) = 0.35714$
- $y_1 = 0, y_2 = 0.21429, y_3 = 0.14286, g(y_1, y_2, y_3) = 0.35714$
- $\nu'' = \dfrac{1}{f(x_1, x_2)} = 2.8$
- $P'' = v''X^* = (0.3, 0.7)$
- $Q'' = v''Y^* = (0, 0.6, 0.4)$

Для игры с матрицей A' стратегии будут теми же $P' = P'', Q' = Q''$, но цена игры уменьшиться $\nu' = \nu'' - 3 = -0.2$

Ответ: $P^* = (0, 0.3, 0.7)$, $Q^* = (0, 0.6, 0, 0.4, 0)$, $\nu = -0.2$