Лекция 2

Решение игр $2 \times n$ и $n \times 2$

Если матрица игры состоит из двух строк или двух столбцов, то она сводится к решению игры 2×2 геометрическим способом

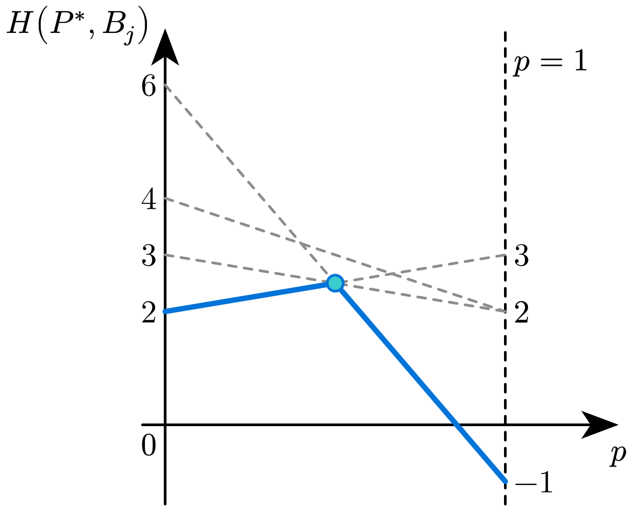
Ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Пусть оптимальная стратегия первого игрока $P^* = (p, 1-p)$

Тогда при применении вторым игроком чистой j-ой стратегии, ожидаемый выигрыш будет $H(P^*, B_j) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$ – уравнение отрезка с концами $(0, a_{2j})$ и $(1, a_{1j})$

Соберем результаты каждой чистой стратегии в таблицу:

Стратегия	$p = 0$	$p = 1$
1	4	2
2	3	2
3	2	3
4	6	-1



Решение игры находятся в верхней точке нижней огибающей всех отрезков. Активными стратегиями второго игрока будут 3 и 4

Вычеркнув неактивные стратегии, получаем матрицу $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Ее решением будет для первого игрока $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; для второго игрока: $(3, -1) - (2, 6) = (1, -7) \Longrightarrow Q^* = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$

Цена игры равна $\nu = H(P^*, B_3) = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = 2.5$

Nota. Если игра состоит из двух столбцов, то смотрим с точки зрения второго игрока. И решением игры будет нижняя вершина верхней огибающей

Доминируемая стратегия

Пусть в игре участвуют n игроков, S_i – возможные стратегии i-ого игрока (в общем случае их может быть бесконечное число), а S_{-i} – наборы всех возможных стратегий остальных игроков

Def. Стратегия $s \in S_i$ i-ого игрока **строго доминируема**, если существует стратегия $s' \in S_i$ такая, что $H(s, s_{-i}) < H(s', s_{-i})$ для любых $s_{-i} \in S_{-i}$

Def. Стратегия $s \in S_i$ **слабо доминируема**, если $\exists s' \in S_i$ такая, что $H(s, s_{-i}) \leq H(s', s_{-i})$ для любых $s_{-i} \in S_{-i}$

Если стратегия строго доминируема, то во всех возможных стратегиях остальных игроков результат ее применения будет хуже, чем при некоторой другой стратегии. Поэтому i-ый игрок никогда ее не применяет, остальные игроки это понимают, из-за этого строго доминируемые стратегии можно вычеркнуть, а игра упрощается

Nota. В общем случае можно вычеркивать только строго доминируемые стратегии, в противном случае можем потерять важные точки равновесия. В матричных играх допустимо вычеркивать слабо доминируемые

Ex. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Первая строка имеет числа не большие, чем третья, поэтому третья строка слабо доминирует над первой – ее невыгодно брать первому игроку

Вторая стратегия второго игрока строго доминирует над третьей и пятой, поэтому можно вычеркнуть третий и пятый столбцы

Получаем матрицу проще $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, которую можно решить геометрическим способом

В итоговом решении игры на место вычеркнутых стратегий ставим 0 (то есть $P^* = (0, p_2, p_3)$, $Q^* = (q_1, q_2, 0, q_4, 0)$), а цены игр с матрицами A и A' равны

Nota. В матричной игре доминируемые будут меньшие строки и большие столбцы

Ex. 1. Морской бой

Первый игрок в области 2×3 размещает корабль 1×2, второй игрок стреляет в область, при первом попадании корабль умирает

Отметим точки на области так:

1	2	3
4	5	6

Тогда матрица морского боя выглядит так:

$$\begin{array}{c} \\ (1,2) \\ (2,3) \\ (4,5) \\ (5,6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Очевидно, что второй столбец доминирует над первым и третьим столбцами, а пятый над четвертым и шестым

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,2) \\ (2,3) \\ (4,5) \\ (5,6) \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

По тем же причинам вычеркиваем вторую и третью строки (игра симметрична относительно того, как ставить корабль в определенной строке)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,2) \\ (5,6) \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Получаем орлянку: $P^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = 0$

Ex. 2. Море Бисмарка

В 1943 году генерал Хитоси Имамура должен был доставить подкрепление в оккупированную Новую Гвинею, а адмирал Джордж Кенни должен был воспрепятствовать этому с помощью авиации

Имамура мог идти только северным или южным путями. В первом случае он попадал на два дня в зону действия авиации, а во втором на три. Кенни мог послать авиацию только в одну точку и только на один день за раз

За выигрыш считаем число дней, в течение которых происходила бомбардировка морского флота Японии

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Север} & \text{Юг} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Север} \\ \text{Юг} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Стратегия Имамуры послать корабли на север слабо доминирует, поэтому вторая стратегия не имеет смысла. Кенни понял, что Имамура отправит подкрепление северным путем, поэтому послал авиацию на север

Ex. 3. Аукцион второй цены (или аукцион Викри)

Выставлен на аукцион лот, на него пришли n потенциальных покупателей. Установим v_i – ценность лота для i-ого игрока, s_i – цена за лот, которую предлагает i-ый покупатель. Лот забирает тот, кто предлагает наибольшую цену, но платит за нее вторую максимальную ставку

При данном аукционе для каждого покупателя доминирующей (слабо) стратегией будет предложить цену s_i, в которую он оценивает данный лот v_i

Проверим это. Пусть r_i – вторая цена, тогда:

1. Сравним с $s_i > v_i$

	$r_i > s_i > v_i$	$r_i < v_i \leq s_i$	$v_i < r_i < s_i$
$s_i = v_i$	0	$v_i - r_i \geq 0$	0
$s_i > v_i$	0	$v_i - r_i \geq 0$	$v_i - r_i < 0$

   Здесь первая стратегия слабо доминирует над второй

2. Сравним с $s_i < v_i$

	$r_i < s_i \leq v_i$	$r_i > s_i$	$s_i < r_i < v_i$
$s_i = v_i$	$v_i - r_i \geq 0$	0	$v_i - r_i \geq 0$
$s_i < v_i$	$v_i - r_i \geq 0$	0	0

   Аналогично, нет смысла брать $s_i < v_i$

В этом аукционе игрок должен предлагать «искреннюю» цену, то есть ту, в которую он ее оценивает. В результате лот получит игрок, для которого он наиболее ценен