

# Вычислительная геометрия

## Содержание

Вычислительная геометрия .....	1
1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование .....	2
1.1 Основные понятия .....	2
1.2 Модели линейных пространств .....	2
1.3 Геометрические преобразования .....	3
1.4 Линейные операторы .....	4
1.5 Аффинное преобразование .....	5
1.5 Однородные координаты .....	7
1.6 Моделирование плоских линий .....	10
1.6.1 Общие сведения .....	10
1.6.2 Дифференциальные характеристики .....	12
1.6.3 Конструирование кривой по Безье .....	14
1.6.4 Дискретизация (растровое изображение) линий .....	17
2. Геометрический поиск .....	19
2.1 Пересечение отрезков .....	19

# 1. Преобразование изображений. Геометрическое моделирование

## 1.1 Основные понятия

*Мет.* Линейное пространство – это множество векторов  $V$  с определенными операциями сложения  $+$  и умножения на число  $\cdot \lambda$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , которые удовлетворяют свойствам:

1.-4. свойства абелево-аддитивной группы:

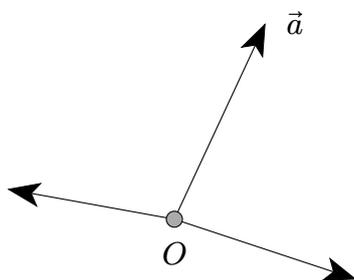
1.  $x + y = y + x$  для  $x, y \in V$
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  для  $x, y, z \in V$
3. Существует такой  $0$ , что  $x + 0 = x$  для  $x \in V$
4. Для любого  $x \in V$  существует такой  $-x$ , что  $x + (-x) = 0$
5.  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$  для  $x \in V$
6.  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  для  $x \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
7.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  для  $x \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
8.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  для  $x, y \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

В общем случае умножение определено на комплексное число, но мы будем рассматривать вещественные

**Def.** Линейная комбинация векторов  $x, y, z, \dots$  называется сумма  $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \dots$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

## 1.2 Модели линейных пространств

Геометрическое



Линейное пространство – направленные отрезки с общим началом

Арифметическое

$$x = (x_1, x_2) \text{ в } \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \text{ в } \mathbb{R}^3$$

$$\text{В общем случае } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ в } \mathbb{R}^n$$

Линейное пространство – множество упорядоченных совокупностей  $n$  чисел

Между этими моделями вводится изоморфизм с помощью базиса, например,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Тогда всякий геометрический вектор можно преобразовать в арифметический и наоборот:  $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} = (x_1, x_2)$

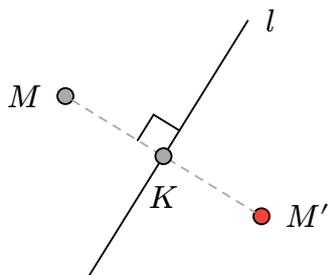
### 1.3 Геометрические преобразования

**Def.** Геометрическое преобразование – это биекция, которая переводит пространство  $\Omega$  в себя

**Def.** Движение – геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между двумя любыми точками (изометрия)

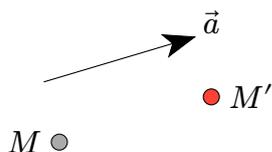
Виды движения на плоскости  $\mathbb{R}^2$ :

1. Осевая симметрия  $S_l$  относительно оси  $l$



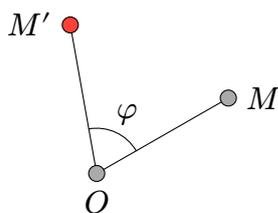
$$M' = S_l(M) \text{ так, что } \begin{cases} MM' \perp l \\ MK = KM' \end{cases}$$

2. Перенос  $T_{\vec{a}}$  на вектор  $\vec{a}$



$$M' = T_{\vec{a}}(M) \text{ так, что } \overline{MM'} = \vec{a}$$

3. Поворот  $R_O^\varphi$  относительно точки  $O$  на ориентированный угол  $\varphi$



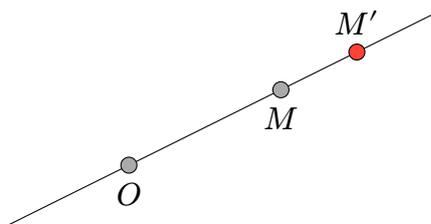
$$M' = R_O^\varphi(M) \text{ так, что } \begin{cases} \angle(MOM') = \varphi \\ OM = OM' \end{cases}$$

Традиционно принимаем положительный угол за поворот против часовой стрелки

**Def.** Конформное преобразование – преобразование, сохраняющее углы

Виды конформных преобразований на плоскости  $\mathbb{R}^2$ :

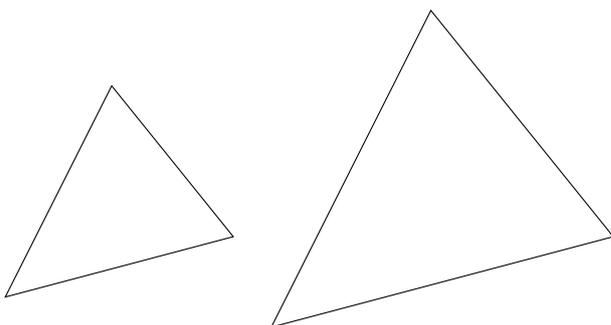
1. Гомотетия  $H_O^k$  относительно точки  $O$  с коэффициентом  $k \in \mathbb{R}$



$$M' = H_O^k(M) \text{ так, что } \begin{cases} M' \in OM \\ \frac{OM'}{OM} = k \end{cases}$$

*Nota.* Если  $k < 0$ , то точки  $M$  и  $M'$  будут по разные стороны от точки  $O$

2. Подобие  $P_k$  с коэффициентом  $k$  – композиция движения и гомотетии  $P_k = F \circ H_O^k$   
(здесь  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ )



#### 1.4 Линейные операторы

**Def.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  – отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  (в общем случае  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ ), для которого соблюдаются свойства:

1.  $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
2.  $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$

Если для  $V$  определен базис  $\varepsilon_V = \{e_1, \dots, e_n\}$ , а для  $W$  базис  $\varepsilon_W = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , то действие оператора можно представить так:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{A}(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e'_j$$

**Def.** Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n, j=1..m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  называется матрицей оператора

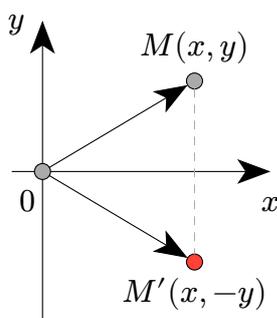
$\mathcal{A} : V \rightarrow W$

Тогда  $\mathcal{A}x = y \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Найдем матрицы геометрических преобразований на  $\mathbb{R}^2$

1. Осевая симметрия  $S_l$

Чаще всего на практике используются  $S_{Ox}$  и  $S_{Oy}$



Для  $S_{Ox}$  это матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

А для  $Oy$  это  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

## 2. Перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор

Перенос точки на вектор выносит ее из линейного пространства, где точки имеют общее начало, поэтому перенос не является линейным оператором:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

## 3. Поворот

Активным преобразованием называется поворот плоскости, а пассивным – поворот системы координат. Такие преобразования взаимно обратны

Тогда поворот системы координат задается матрицей  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

А поворот плоскости задается обратной матрицей  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

## 4. Гомотетия

Для гомотетии  $H_O^k$  матрица оператора равна  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

## 1.5 Аффинное преобразование

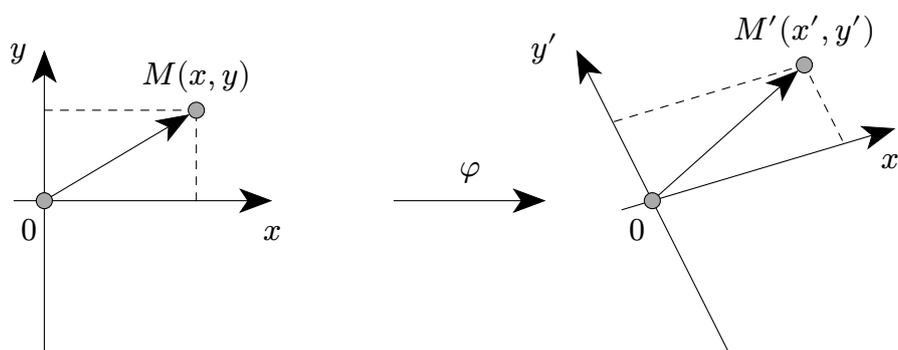
**Def. 1.** Преобразование  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется аффинным преобразованием, если  $\varphi$  – биекция, и для всяких точек на прямой  $A, B, C \in l$  справедливо, что

$$\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \in \varphi(l) \text{ и } \frac{AB}{BC} = \frac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)}$$

*Nota.* Аффинное преобразование не сохраняет углы и расстояния, но сохраняет параллельность

*Nota.* Кроме этого все треугольники аффинно эквивалентны, то есть один треугольник можно перевести в любой другой с помощью аффинного преобразования

**Def. 2.** Преобразование  $\varphi$  – аффинное преобразование, если оно переводит одну систему координат в другую систему координат



*Мет.* Система координат – это определенные точка отсчета, координатная сетка, порядок осей и единичные отрезки

Для дальнейшего нам потребуются уравнения прямых:

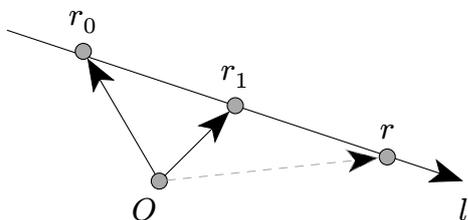
1. По двум точкам на плоскости:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2. По коэффициентам на плоскости:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

3. Векторное:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t$ , где  $t$  – параметр



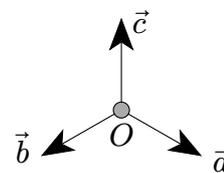
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$

Также нам понадобятся:

- Уравнения плоскостей в пространстве
- Уравнения кривых второго порядка, специальных кривых (спирали, гипоциклоиды)
- Индикатор ориентации

*Мет.*  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{c} : \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ - правая тройка векторов} \end{cases}$$

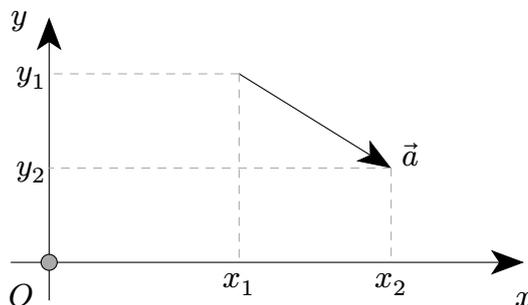


**Def.** Псевдоскалярное (или косое) произведение  $\vec{a} \vee \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ , причем произведение положительно, если угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  положителен (то есть против часовой), и отрицательно, если угол отрицателен (то есть по часовой)

### 1.5 Однородные координаты

*Мет.* В плоскости  $\mathbb{R}^2$  существует линейное пространство направленных отрезков. Проблема состоит в том, что нам нужно представить вектор с другим началом

Тогда такие вектора можно представить двумя точками



Чтобы работать с точками, а не векторами с общим началом  $O$ , обобщим понятие линейного пространства. Тогда понятие линейного пространства обобщается до аффинного, где элементы – это точки, а не векторы

**Def.** Пространство  $\mathcal{A}$  – аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством  $V$ , если:

1. Заданы аксиомы для  $V$
2. Существует  $f : \mathcal{A} \rightarrow V$  такое, что для всякой пары сопоставляется вектор из линейного:  $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad f(A, B) = \overrightarrow{AB} \in V$
3. Для всяких  $A \in \mathcal{A}$  и  $\vec{a} \in V$  существует единственная  $B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
4. Для всяких точек  $A, B, C \in \mathcal{A}$  справедливо, что  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

В аффинном пространстве  $\mathcal{A}$  можно ввести аффинные преобразования. Те, что не связаны с переносом, можно считать линейными в пространстве  $V$ :

1. Осевая симметрия  $S_l$ , если  $O \in l$
2. Поворот  $R_O^\varphi$
3. Гомотетия  $H_O^k$

Их можно представить в виде матрицы. Но перенос выводит из линейного пространства. Нам нужно все преобразования свести к алгебраическому действию  $x' = \mathcal{F}x$ , где  $\mathcal{F}$  – преобразование с матрицей  $F$

Движение плоскости и гомотетия дают формулу:

$$X' = FX + T_{\vec{a}}$$

Вместо

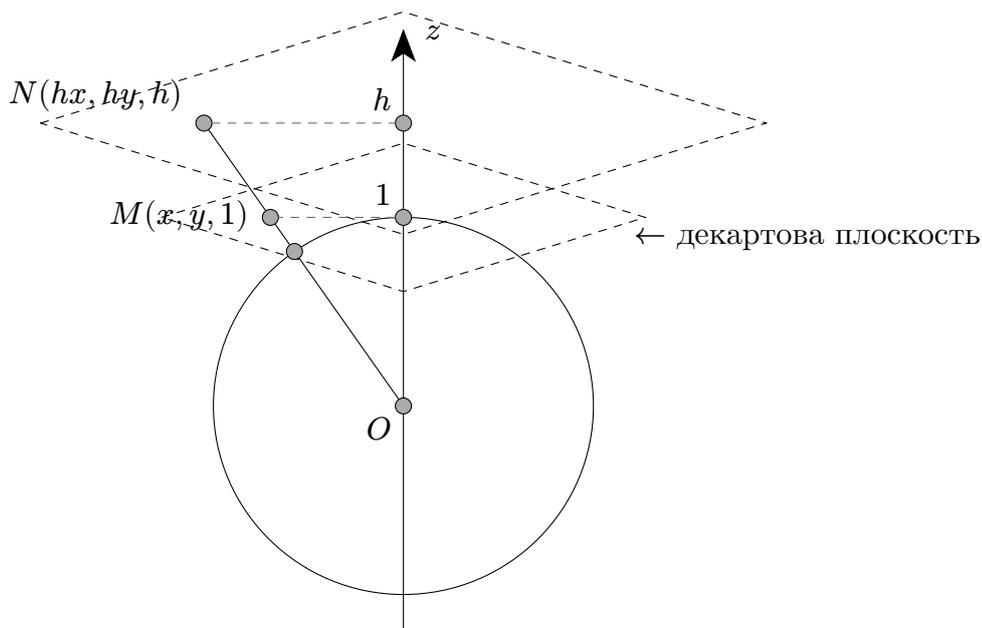
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

рассмотрим векторы с добавленной координатой  $z = 1$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & x_0 \\ f_{21} & f_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x + f_{12}y + x_0 \\ f_{21}x + f_{22}y + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Координаты  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  называют однородными

Геометрическая интерпретация – стереографическая проекция Римана



Далее происходит центральное проектирование на плоскость  $z = h, p(x, y) \rightarrow N(hx, hy, h)$

Таким образом, каждой точке декартовой плоскости ставится в соответствии точка сферы, а она центрально проектируется на плоскость  $z = h$ , где  $h$  отвечает за масштаб. В результате точкам декартовой плоскости  $(x, y)$  соответствуют точки  $(x, y, 1) = (hx, hy, h)$ , а однородные координаты  $(x, y, 0)$  представляют бесконечно удаленную точку декартовой плоскости в направлении вектора  $\vec{a} = (x, y)$

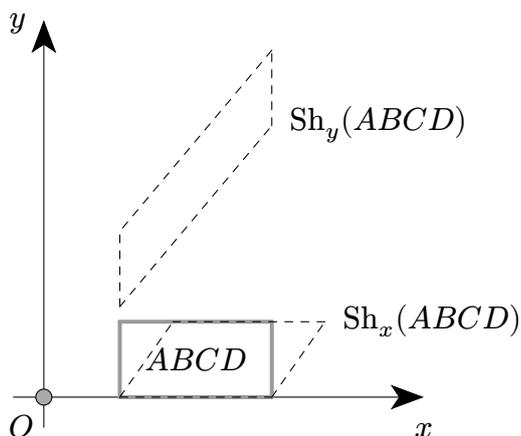
Рассмотрим матрицы преобразований в однородных координатах:

$$F = \begin{pmatrix} a & b & m \\ b & d & h \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  представляет композицию из симметрии, поворота, гомотетии и сдвига

**Def.** Сдвиг (shear)  $Sh_x$  – наклонной перекокс такой, что  $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$ , а  $k = sh_x$

Аналогично по оси  $Oy$  сдвиг  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + sh_y x \end{cases}$



Вектор  $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  – вектор переноса  $T_{(m,n)}$ , число  $s$  – масштаб

Рассмотрим смысл  $(p, q)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline p & q & | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ px + qy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h \end{pmatrix}$$

При фиксированных  $p$  и  $q$  выражение  $h = px + qy + 1$  задает наклонную плоскость в трехмерном пространстве, что позволяет изменять перспективу. На этом курсе операции, использующие  $p$  и  $q$ , рассматриваться не будут

Рассмотрим частные виды преобразований:

- Перенос  $T_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & m \\ 0 & 1 & | & n \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$
- Поворот  $R_O^\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & | & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$
- Симметрия по оси  $S_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$
- Симметрия по биссектрисе  $S_{x=y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$
- Сдвиг  $Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & sh_x & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$

**Еж.** Дан  $\triangle ABC$  с вершинами в координатах  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Найти  $\triangle A'B'C' = \mathcal{F}(\triangle ABC)$

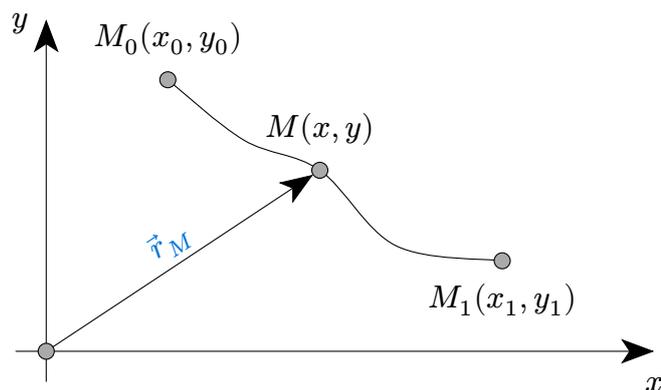
Найдем матрицу координат вершин  $\triangle ABC$ : 
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование осуществляется так:

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ b & d & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Моделирование плоских линий

### 1.6.1 Общие сведения



Пусть  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  – базис (в частности  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  – декартов)

Радиус-вектор точки кривой  $\gamma$  определяется как  $\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Чаще всего кривая  $\gamma$  ориентирована так, что задана начальная точка  $M_0(x_0, y_0)$  и пара уравнений  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , где  $t \in [t_1, t_2]$ . Интервал  $[t_1, t_2]$  задают ориентацию

Таким образом,  $\gamma$  может быть задана:

- параметрически  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$
- общим уравнением  $f(x, y) = 0$

Рассмотрим задания простых кривых:

#### 1. Прямая

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = t\vec{r}_1 + \vec{r}_0(1 - t)$$

Последнее выражение полезно, так как для  $t \in [0, 1]$  уравнение задает отрезок  $M_0M_1$ :  $\vec{r}(t)|_{t=0} = \vec{r}_0$ ,  $\vec{r}(t)|_{t=1} = \vec{r}_1$

#### 2. Окружность

Параметрическое уравнение: 
$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \text{ для } t \in [0, 2\pi)$$

Радиус-вектор задается как  $\vec{r}(t) = R(\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t) = R(\cos t, \sin t)$

### 3. Кривая второго порядка в общем виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

При этом один или более из коэффициентов  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  не равны нулю

Коэффициенты кривой можно представить в виде матрицы:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Коэффициенты  $a_{13}$  и  $a_{23}$  отвечают за перенос кривой, а  $a_{33}$  за масштаб

В однородных координатах  $\vec{r} = (x, y) \rightarrow (x, y, 1)$  получаем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix}$$

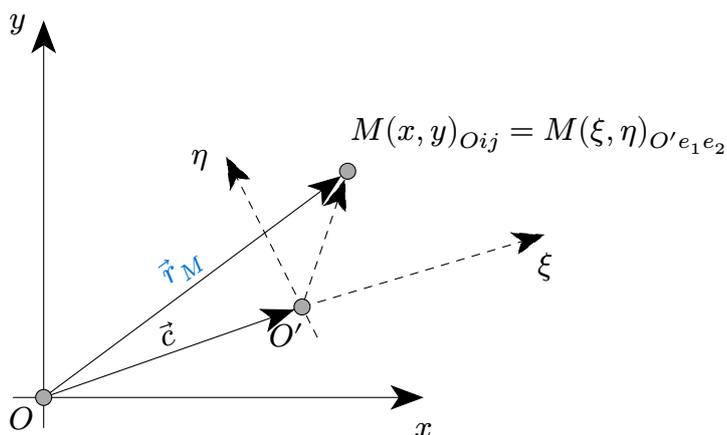
Если слева домножить на вектор-строку  $(x, y, 1)$ , то получим:

$$\begin{aligned} (x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23}y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \end{aligned}$$

Тогда общее уравнение кривой второго порядка в матричном виде записывается

$$\text{как } (x, y, 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

*Nota.* Пусть есть аффинный базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Нужно перевести координаты точки  $M(\xi, \eta)$  из нового базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  в координаты  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  из нового базиса  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



Радиус-вектор точки в базисе  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  равен  $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2 + \vec{c}$ . Здесь  $\vec{c}$  – смещение начал координат

В однородных координатах это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e_{1x} \\ \xi e_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta e_{2x} \\ \eta e_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь  $P = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица аффинного преобразования, где  $\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix}$  – матрица приведения из базиса  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  в базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Такая матрица не меняет инварианты, поэтому можно делать подобные преобразования кривых:

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies (\xi, \eta, 1)PAP^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

**Def.** Инварианты кривой второго порядка – выражения, значения которых остаются постоянными при применении аффинных преобразований:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тип кривой определяется по инвариантам:

- Если  $I_2 > 0$ , то кривая эллиптического типа
- Если  $I_2 < 0$ , то кривая гиперболического типа
- Если  $I_2 = 0$ , то кривая параболического типа

### 1.6.2 Дифференциальные характеристики

*Мет.* Для кривой  $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Гладкость кривой – непрерывная дифференцируемость  $x(t)$  и  $y(t)$ , то есть для всякой  $M \in \gamma$  существуют  $\frac{dy}{dx} = \varphi(t)$ , которая непрерывная
- Касательная – вектор (или прямая), имеющая одну общую точку с кривой в окрестности

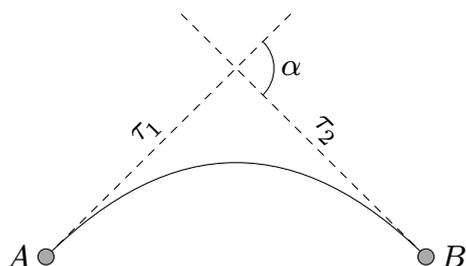
Если кривая задается как  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ , то касательная задается как производная:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

- Нормаль – перпендикуляр к кривой в точке. Вектор нормали задается как перпендикулярный к касательной:  $\vec{n} \perp \vec{r}'$
- Длина дуги (элемента):  $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = |\vec{r}'(t)| dt$

Рассмотрим новые характеристики для кривой:

- Кривизна кривой в точки



Касательная  $\tau_1$  переходит в  $\tau_2$  при  $A \rightarrow B$ , поворачиваясь на угол  $\alpha$  – угол смежности

Средняя кривизна на дуге  $\overset{\smile}{AB}$  равна  $K_{\text{cp}} = \frac{\alpha}{|\overset{\smile}{AB}|}$

**Def.** Кривизна кривой  $\gamma$  в точке  $A$  определяется как  $K_A = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ \text{по } AB}} K_{\text{cp}} = \lim_{|\overset{\smile}{AB}| \rightarrow 0} \frac{\alpha}{|\overset{\smile}{AB}|}$

**Ex.** Окружность

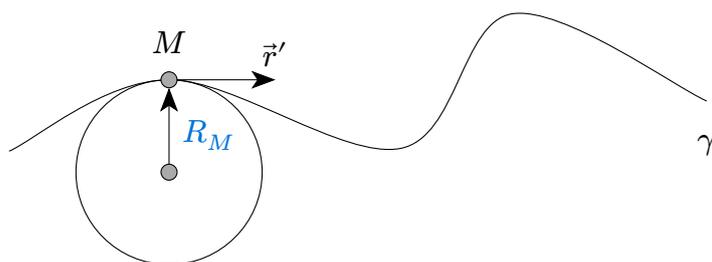
$\angle AOB = \alpha, |\overset{\smile}{AB}| = \alpha R$ , тогда  $K_A = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}$

- Радиус кривизны

**Def.** Величина  $\frac{1}{K_A} = R_A$ , обратная кривизне в точке, называется радиусом кривизны в точке

*Nota.* У окружности радиус кривизны совпадает с ее собственным радиусом.

Сама окружность – линия постоянной кривизны. Другая такая линия постоянной кривизны – прямая, где кривизна равна 0



- Центр кривизны

**Def.** Центр кривизны кривой  $\gamma$  в точке  $M$  – это точка на нормали к  $\gamma$  в точке  $M$  на расстоянии  $R_M$  от  $M$ , находящаяся в той полуплоскости, разделенной касательной, что и окрестность кривой

**Def.** Эволюта кривой – множество центров кривизны

Для характеристик можно выразить другие формулы:

• Кривизна  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \varphi'(s) = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{t=x}{=} \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$  – угол касательной

$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y_x'^2}$

$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$

$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$

В параметрическом задании  $K = \frac{|y_t'' x_t' - y_t' x_t''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

• Центр кривизны:  $\begin{cases} x_0 = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ y_0 = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$

### 1.6.3 Конструирование кривой по Безье

Во Франции конца 1950-х годов автомобилестроение переживало эпоху расцвета дизайна, и инженерам нужен был способ описывать сложные, плавные изгибы кузовов автомобилей не на чертежной доске, а с помощью первых компьютеров для станков с ЧПУ. Традиционных инструментов для этой задачи было недостаточно

В этот период сразу два французских автогиганта, Citroën и Renault, независимо друг от друга работали над решением этой проблемы

Пьер Безье из Renault, инженер-механик и электрик, пришел к решению к 1962 году, разработав свою систему для компьютерного проектирования кузовов автомобилей, аэродинамические свойства которых легко задаются

**Def.** Кривая Безье  $n$ -ого порядка в параметрической форме описывается функцией

$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t)$ , где

- $0 \leq t \leq 1$ ,
- $P_i = (x_i(t), y_i(t))$  – координаты опорных точек,
- а  $b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$  – полиномы Бернштейна, где  $i$  – порядковый номер опорной точки

*Nota.* Упорядоченное множество опорных точек  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  называется характеристической ломаной

*Nota.* Прямое вычисление  $B(t)$  как пары функций  $B_x(t)$  и  $B_y(t)$ , определяющих точки кривой, – сложная задача, поэтому чаще используют алгоритм Кастельжо:

Заданы точки  $P_0, P_1, \dots, P_n$  нулевого порядка

Тогда  $P_i^j(t) = (1-t)P_i^{j-1}(t) + tP_{i+1}^{j-1}(t)$ , где  $i$  – номер вершины, а  $j$  – порядок вершины

Поль де Кастельжо, работая в Citroën, разработал независимо от Безье в 1959 году алгоритм для построения кривой, однако его разработки оставались коммерческой тайной, поэтому кривые получили название в честь Безье

Рассмотрим примеры:

**Ех. 1.**  $n = 1$ , даны  $P_0$  и  $P_1$

Для точки первого порядка  $P_0^1 = (1-t)P_0^{1-1} + tP_1^{1-1} = (1-t)P_0 + tP_1$



В  $t = 0$   $P_0^1 = P_0$ , в  $t = 1$   $P_0^1 = P_1$ . При  $0 < t < 1$   $P_0^1(t)$  – точка, пробегающая отрезок

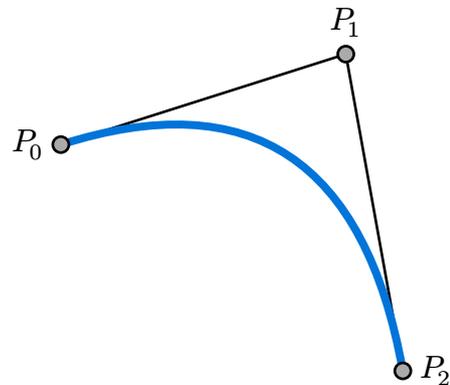
В данном случае (так как меньше двух точек нельзя задать)  $P_0^1(t) = B(t)$ , то есть при  $n = 1$  кривая Безье – отрезок  $P_0P_1$

**Ех. 2.**  $n = 2$ , даны  $P_0, P_1, P_2$

По определению  $B(t) = \sum_{i=0}^2 P_i C_2^i t^i (1-t)^{2-i} = P_0(1-t)^2 + 2P_1t(1-t) + P_2t^2$

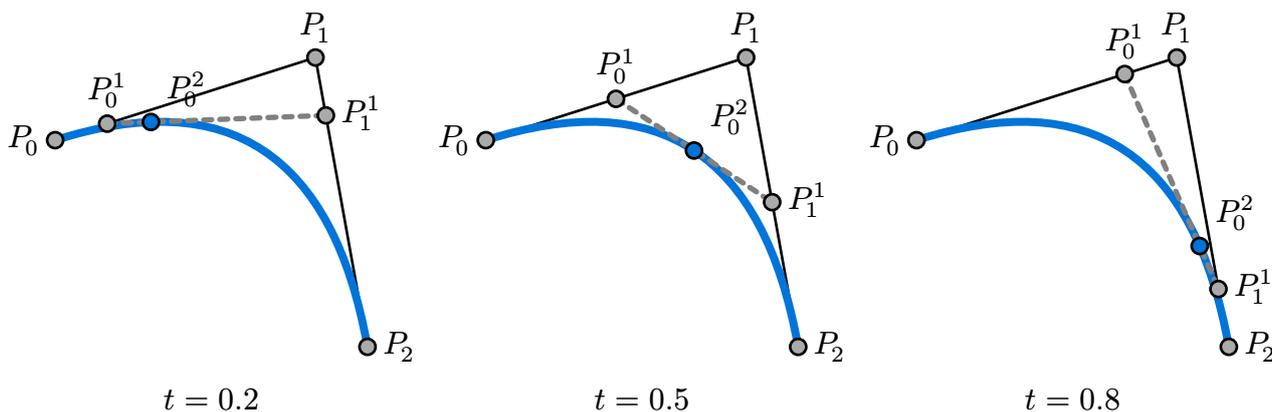
По Кастельжо  $P_0(t=0)$ ,  $P_2(t=1)$ :

- $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$
- $P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$
- $P_1^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$   
 $= (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$   
 $= B(t)$



В случае  $n = 2$  кривая Безье – это парабола (в частной случае прямая)

По алгоритму Кастельжо становится видно, что характеристическая ломаная является касательной к кривой Безье. Сами точки первого порядка при разных  $t$  дают отрезки, которые касаются кривой, а точка второго порядка лежит непосредственно на кривой Безье:

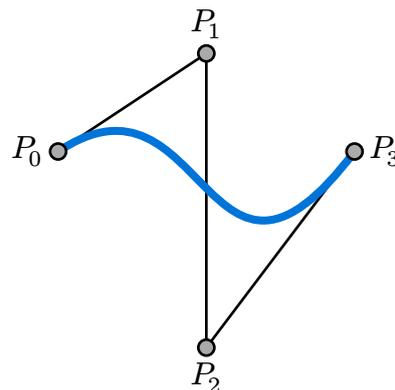


Ех. 3.  $n = 3$ , даны  $P_0, P_1, P_2, P_3$

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Или в матричном виде  $B(t) = (t^3, t^2, t, 1) \cdot M_B \cdot \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$

Здесь  $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – матрица Безье



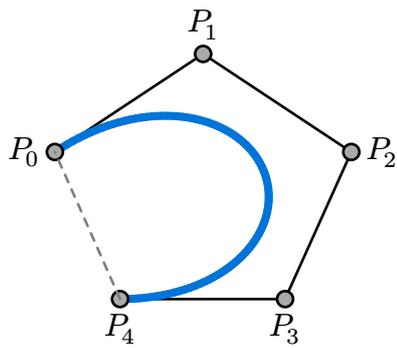
Для кривых Безье справедливы свойства:

- Порядок кривой Безье инвариантен при аффинных преобразованиях

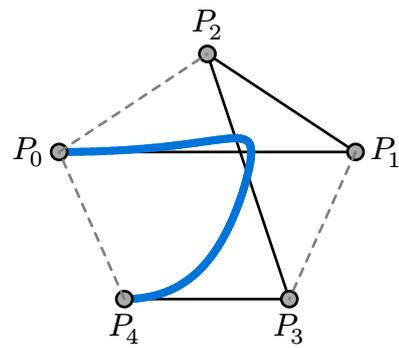
Пусть  $P_0, \dots, P_n$  содержит  $k$  коллинеарных точек.  $\mathcal{F}(P_0, \dots, P_n) = P'_0, \dots, P'_n$  – образы точек при аффинном преобразовании. И так как матрица  $F$  не вырождена, среди  $P'_0, \dots, P'_n$  останется  $k$  коллинеарных, таким образом порядок кривой сохранится

То есть можно не подвергать всю кривую аффинному преобразованию, а всего лишь ее ломаную

- Непрерывность
- Вся кривая лежит внутри многоугольника  $P_0, \dots, P_n$  или выпуклой оболочки



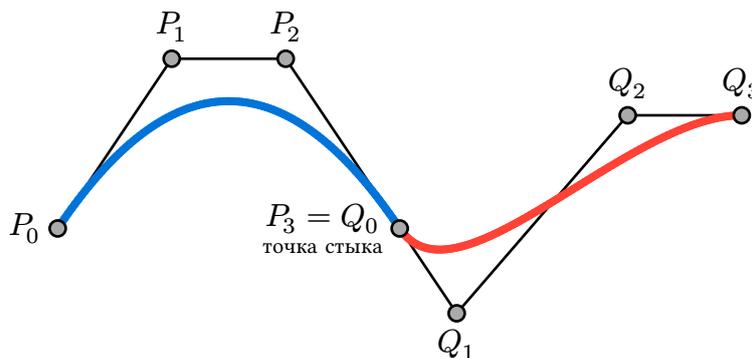
Кривая находится  
в пятиугольнике  $P_0P_1P_2P_3P_4$



Кривая находится  
в пятиугольнике  $P_0P_2P_1P_3P_4$

- Симметрия при смене порядка обхода ломаной
- Кусочная гладкость. Польза этого свойства заключается в том, что кривые Безье допускают гладкое сочленение двух кривых

**Def.** Сплайн – составная кривая, гладкая в точках стыка



*Nota.* Геометрически, гладкость эквивалентна спрямляемости, то есть в малой окрестности кривая - это почти прямая

Тогда сформулируем правило: чтобы построить сплайн Безье, нужно состыковать кривые  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$  так, что предпоследняя опорная точка  $P_{n-1}$  кривой  $B_1(t)$ , вторая опорная точка  $Q_1$  кривой  $B_2(t)$  и точка стыка  $P_n = Q_0$  были расположены на одной прямой (то есть коллинеарно)

*Nota.* Окружность и эллипс нельзя в точности представить кривыми Безье

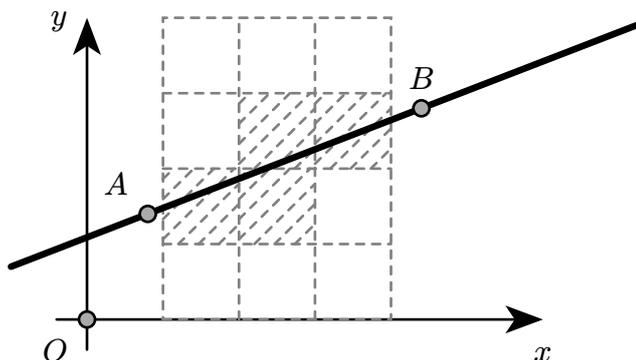
#### 1.6.4 Дискретизация (растровое изображение) линий

Рассмотрим построение отрезка прямой с известным наклоном или проходящей через две данные точки на экране в пикселях

1. Естественный алгоритм

Нам известно уравнение прямой  $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

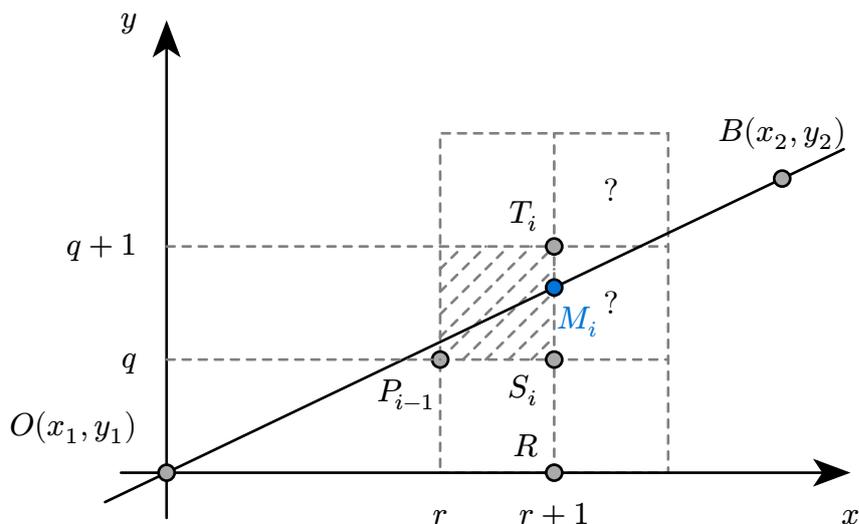
Если выразим  $y$  через  $x$ , получим  $y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$  – деление, из-за которого мы вынуждены округлять при выборе пикселя для  $y$



Лучше использовать алгоритм Брезенхэма

## 2. Алгоритм Брезенхэма

Считаем, что  $k \in [0, 1]$ , то есть прямая ближе к оси  $Ox$ , чем к  $Oy$ . При  $k \in [1, \infty)$  и  $k < 0$  алгоритм аналогичен



Сделаем допущение, что начало координат находится в точке  $(x_1, y_1)$ . Пусть на предыдущем шаге мы выбрали пиксель  $P_{i-1}$  с координатами  $(r, q)$  в системе  $Oxy$ . Тогда соседними кандидатами на следующем шаге будут  $S_i(r + 1, q)$  и  $T_i(r + 1, q + 1)$

Алгоритм сводится к тому, что бы из двух пикселей  $S_i$  и  $T_i$  выбрать тот, который ближе к точке  $M_i$

Введем величину  $\Delta_i = S - T$ , где  $S = |S_i - M_i|$ ,  $T = |T_i - M_i|$  – расстояния от точки  $M_i$  до соответствующих пикселей

Если  $\Delta_i \geq 0$ , то есть  $S \geq T$ , выбираем пиксель  $T_i$ , иначе –  $S_i$

Из подобия треугольников получаем пропорцию:  $k = \frac{dy}{dx} = \frac{M_i R}{OR} = \frac{q + S}{r + 1}$

Отсюда  $S = \frac{dx}{dy}(r + 1) - q$

Так как  $S + T = 1$ ,  $T = 1 - S$ . Умножая разность  $S - T$  на  $dx$ , получаем  $dx(S - T) = 2(r + 1)dy - (2q + 1)dx$

Если  $dx > 0$ , знак  $\Delta_i = S - T$  совпадает со знаком  $dx \cdot \Delta_i$ . Обозначим  $d_i = dx \cdot \Delta_i$ , тогда  $d_i = 2(r + 1)dy - (2q + 1)dx$

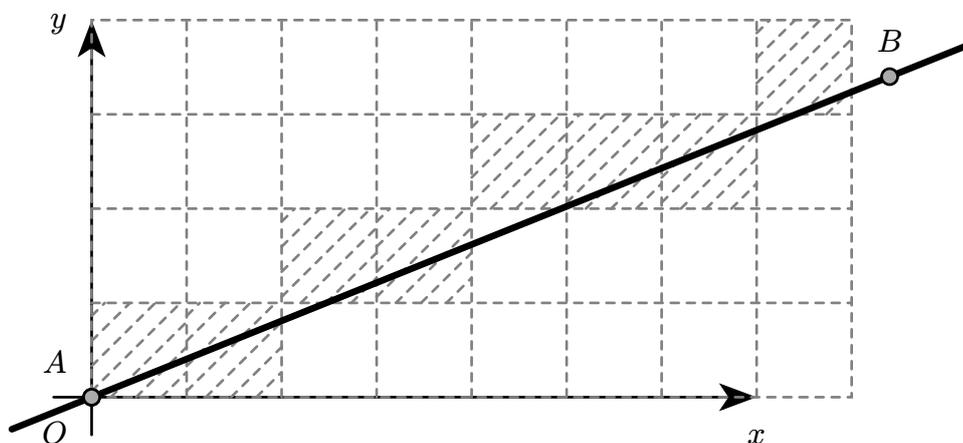
На следующем шаге  $(i + 1)$  координаты текущего пикселя будут  $(x_i, y_i)$ , тогда  $d_{i+1} = 2x_i dy - 2y_i dx + 2dy - dx$

Из этого  $d_{i+1} - d_i = \underbrace{2(x_i - x_{i-1})}_{=1} dy - 2(y_i - y_{i-1}) dx$ , то есть  $d_{i+1} = d_i + 2dy - 2(y_i - y_{i-1}) dx$

Здесь возможны два случая:

- Если  $d_i \geq 0$ , выбираем пиксель  $T_i$  с координатами  $(x_i, y_i)$ . Тогда приращение координаты  $y$  равно 1, и формула упрощается:  $d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx)$
- Если  $d_i < 0$ , выбираем пиксель  $S_i$  с координатами  $(x_i, y_{i-1})$ . Здесь  $y_i = y_{i-1}$ , поэтому  $d_{i+1} = d_i + 2dy$

Начальное значение  $d_1$  вычисляется для первого шага  $i = 1$  как  $d_1 = 2dy - dx$

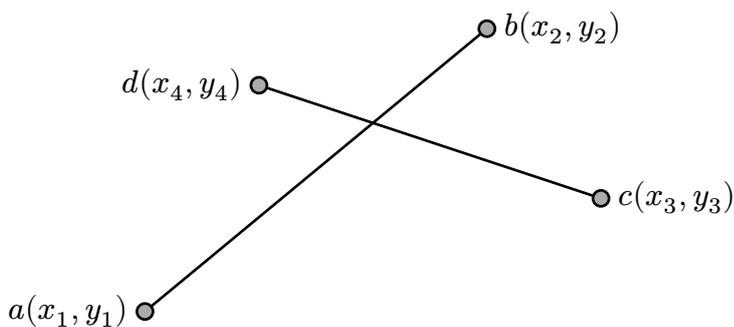


## 2. Геометрический поиск

### 2.1 Пересечение отрезков

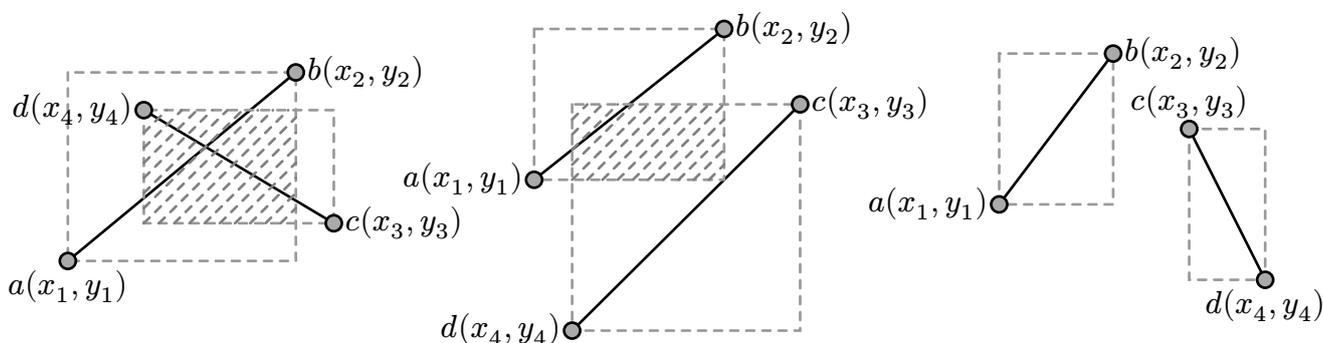
Геометрическая задача – определить, какие из  $N$  отрезков на плоскости пересекаются, и найти точки пересечения

Для начала рассмотрим два отрезка:



Отрезки будут заданы координатами вершин  $a(x_1, y_1)$ ,  $b(x_2, y_2)$ ,  $c(x_3, y_3)$ ,  $d(x_4, y_4)$

Грубый способ определить то, что отрезки не пересекаются, – сравнить абсциссы  $\min(x_1, x_2)$  и  $\max(x_3, x_4)$  (или наоборот) или аналогично ординаты (то есть прямоугольники, где диагональ – отрезок)



Как видно, пересечение ограничивающих отрезки прямоугольников является *необходимым* условием для пересечения отрезков, но не *достаточным* (см. второй пример), поэтому применяют другие алгоритмы

Из школьной геометрии знаем, что любая прямая делит плоскость на две полуплоскости

Если отрезки пересекаются, то точки  $c$  и  $d$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $l$  (обратное при этом неверно)

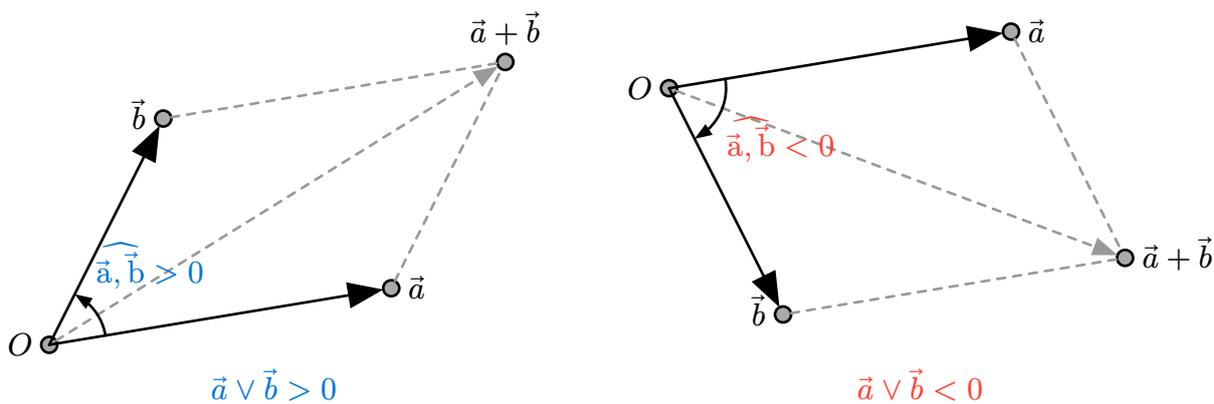
Однако аналогично, если отрезки пересекаются, то точки  $a$  и  $b$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $p$ , образованной точками  $c$  и  $d$

Теперь нужен алгоритм, который проверяет, что точки одного отрезка лежат по разные стороны относительно прямой другого отрезка

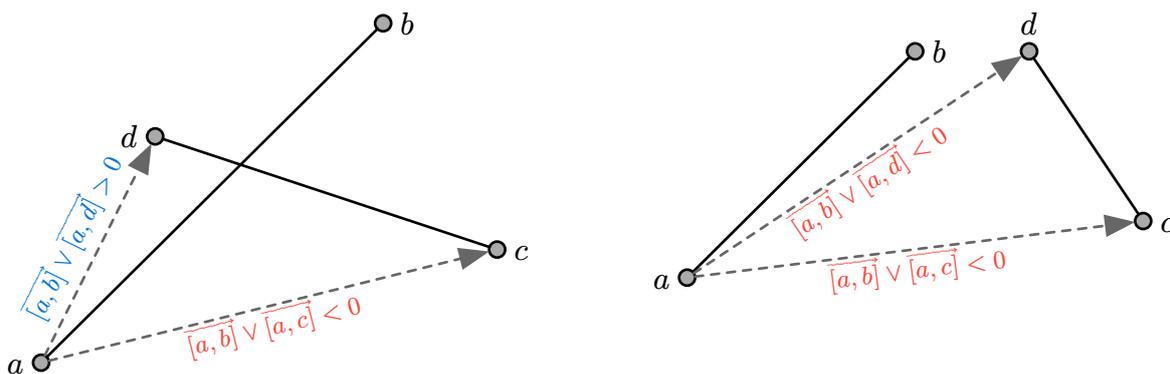
*Мет.* Пусть  $\vec{a}, \vec{b}$  находятся на плоскости. Косое произведение  $\vec{a} \vee \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \text{площадь параллелограмма}$$

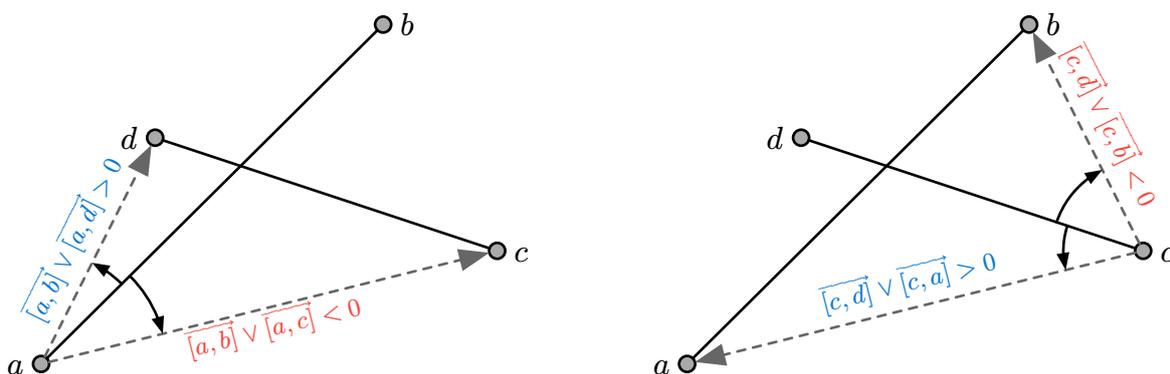
Косое произведение со знаком «плюс» равно площади параллелограмма, образованного векторами, концы которых расположены по часовой стрелке



Применим к задаче. Косое произведение показывает ориентацию, поэтому, если точки находятся по разные стороны от прямой, то косые произведения  $[\vec{a}, \vec{b}] \vee [\vec{a}, \vec{c}]$  и  $[\vec{a}, \vec{b}] \vee [\vec{a}, \vec{d}]$  должны иметь разные знаки

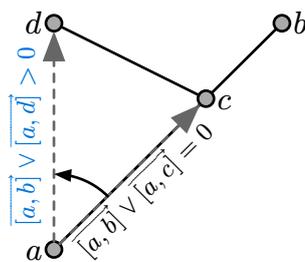


Аналогично проверяем произведения  $[\vec{c}, \vec{d}] \vee [\vec{c}, \vec{a}]$  и  $[\vec{c}, \vec{d}] \vee [\vec{c}, \vec{b}]$



Для непересекающихся отрезков одна пара произведений из двух будет иметь один знак

*Nota.* Если одна из точек одного отрезка находится на другом отрезке, то косое произведение равно 0



Теперь найдем саму точку пересечения. Нам известны уравнения прямых:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Далее решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Получаем 
$$\begin{cases} k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ k_2 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \\ b_1 = y_1 - k_1 x_1 \\ b_2 = y_3 - k_2 x_3 \\ x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \\ y = k_1 x + b_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\left(y_3 - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} x_3\right) - \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1\right)}{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}} \\ y = k_1 x + b_1 \end{cases}$$

Результатом будет точка пересечения прямых. Так как прямые бесконечно длинные, то нужна дополнительная проверка, описанная выше, на то, что пересекаются действительно отрезки, а не только прямые

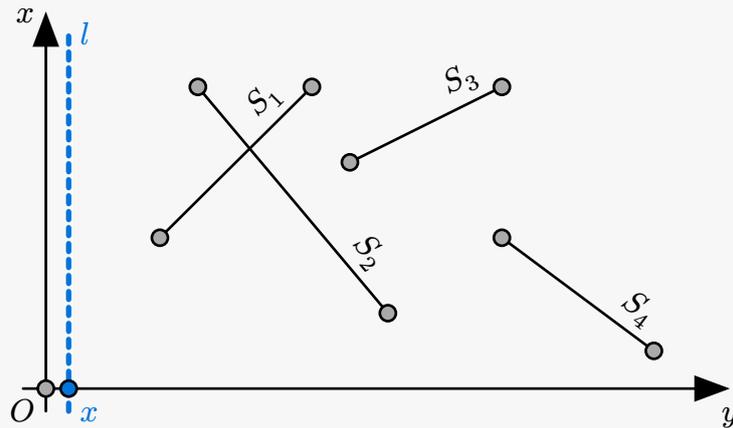
*Nota.* Если число отрезков велико, то проверка попарных пересечений очень затратна, асимптотическая сложность –  $O(n^2)$

Поэтому применяют алгоритм «заметающей» прямой:

Сделаем допущение, что точки пересечения образуются пересечением только двух отрезков и нет вертикальных отрезков

Тогда:

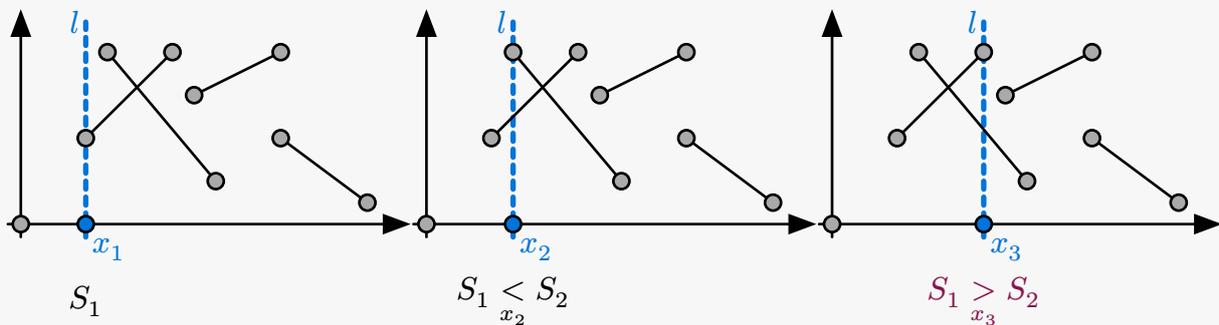
1. Берем вертикальную прямую  $l$ , проходящую через точку  $(0, x)$
2. Все отрезки заданы списком координат их концов. Тогда можем отсортировать этот список по возрастанию абсцисс точек



3. Прямая  $l$  движется направо и пересекает концы отрезков. Встречу прямой с концами отрезков обозначим событием. Все отрезки, отвечающие событию  $x$  (точка с абсциссой  $x$  принадлежит этим отрезкам), называется смежными по  $x$

Далее вводим отношение сравнения отрезков  $S_i$  и  $S_j$ :  $S_i >_x S_j$  ( $S_i$  выше  $S_j$ ) означает, что в точке  $x$  ордината точки  $S_i \cap l$  больше ординаты  $S_j \cap l$

4. Если найдена смена отношения  $>$  в разных событиях, то отрезки пересеклись



Сложность данного алгоритма составляет  $O(n \log n)$