

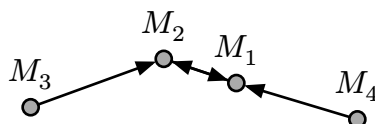
2.4 Близость

Пусть есть задача найти в множестве $M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ к данной точке M_k ближайшей точки, ближайшей пары или ближайших соседей

Def. Точка M^* – ближайшая к M_k , если $\text{dist}(M^*, M_k) = \min_j \text{dist}(M_j, M_k)$

Nota. Отношение близости к M_k несимметрично, то есть M^* – ближайшая к $M_k \not\Rightarrow M_k$ – ближайшая к M^*

Ex. M_2 – ближайшая к M_3 , но ближайшая к M_2 не M_3 , а M_1



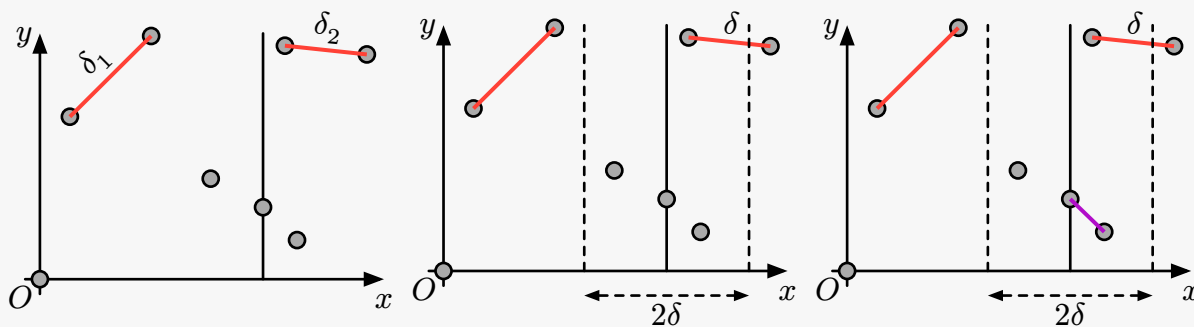
Def. Если отношение близости для пары M_i и M_j симметрично, то (M_i, M_j) – ближайшая пара

2.4.1 Ближайшая пара

Nota. Наивным алгоритмом будет являться поиск всех расстояний $\text{dist}(M_i, M_j)$ для $i \neq j$ и поиск $\min_{i,j} \text{dist}(M_i, M_j)$. Такой алгоритм обладает сложностью $O(n^2)$

Рассмотрим алгоритм «разделяй и властвуй»

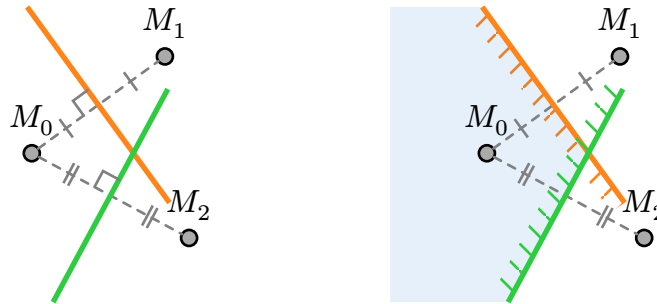
1. Разделяем M на левое подмножество M_1 и правое M_2
2. Пусть нашлись ближайшие пары $(L_1, L_2) \in M_1$ и $(P_1, P_2) \in M_2$
Для них $\delta_1 = \text{dist}(L_1, L_2)$ и $\delta_2 = \text{dist}(P_1, P_2)$. Обозначим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
3. В δ -полосе (полосе шириной 2δ) разделителя находим ближайшую пару, если она там есть, и проверяем, что расстояние для пары меньше, чем δ
4. Повторяем алгоритм рекурсивно. Концом деления можно считать тот момент, когда в подмножестве остается 2 или 3 точки



2.4.2 Построение локус-сети (диаграммы Вороного) множества

Def. Локус точки M_0 – множество точек $N(x, y)$ такие, что $\text{dist}(M_0, N) < \text{dist}(M_i, N)$ для $i = 1, 2, \dots$ (то есть множество точек, которые к M_0 ближе, чем к остальным)

Nota. Форма локуса – это пересечение полуплоскостей, каждая из которых задается неравенством $\text{dist}(M_0, N) < \text{dist}(M_i, N)$ и ограничена серединным перпендикуляром к отрезку M_0M_i



Nota. Точки локуса для M_0 лежат в той же полуплоскости, что и M_0 по отношению к серединному перпендикуляру отрезка M_0M_1

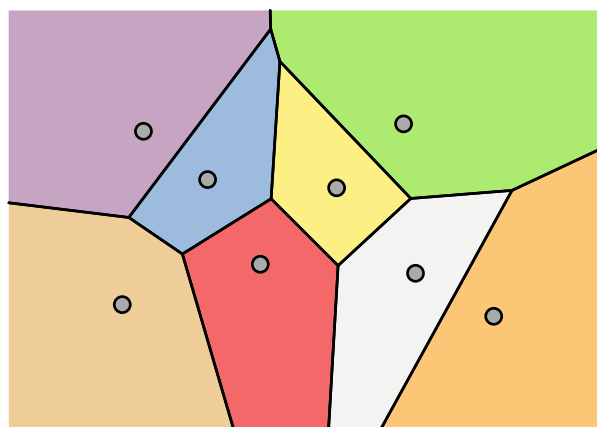
Если M_0 – внутренняя точка множества M , то ее локус – это замкнутый многоугольник. Если M_0 принадлежит выпуклой оболочке, то локус – это неограниченный полигон

Nota. Наложим требование на M : никакие 4 точки не лежат на одной окружности

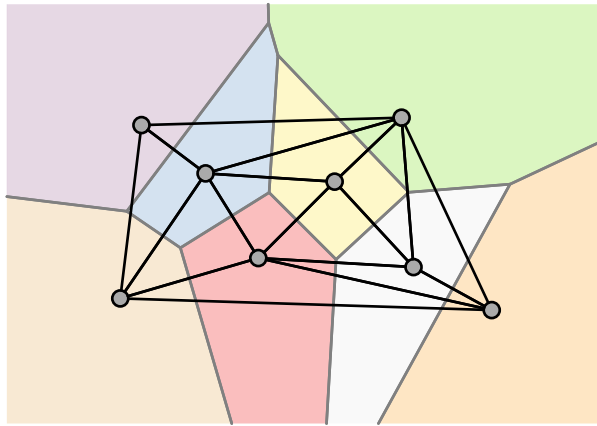
Тогда у локус-сети есть свойства:

1. Любая вершина – пересечение двух ребер
2. Любое ребро связывает 2 вершины
3. Любая вершина – центр окружности, описанной около трех точек M
4. Любое ребро определяет ближайшего соседа

Итак, диаграмма Вороного выглядит так:



Def. Граф, двойственный диаграмме Вороного, задает триангуляцию M (в частности триангуляцию Делоне):



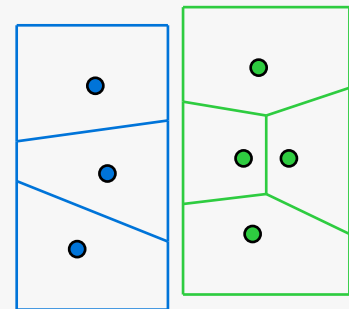
Диаграмму Вороного можно описать набором вершин, в которых сходятся ребра, и набор ребер для каждой вершины. Триангуляция представляется набором треугольных ячеек

С помощью диаграммы Вороного задача о нахождении ближайшей точки решается легче – можно рассматривать лишь точки в окружении

Диаграмму Вороного можно построить:

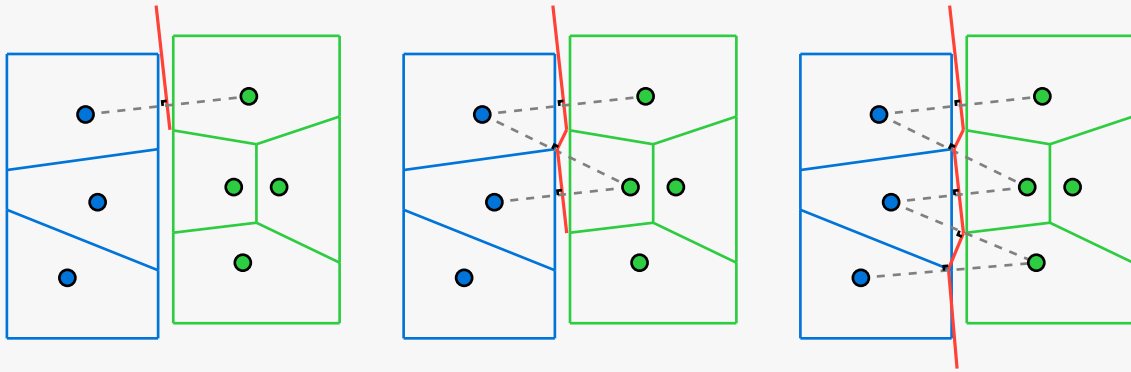
- По наивному алгоритму с помощью пересечения полуплоскостей, образованных серединными перпендикулярами
- По алгоритму «разделяй и властвуй»

1. Разделяем точки на две половины по x , рекурсивно строим диаграммы для левой половины L и правой R

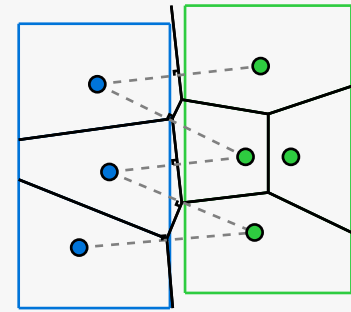


2. Строим разделяющую ломаную – множество точек, равноудалённых от ближайших точек левой и правой диаграммы. Ломаная состоит из отрезков серединных перпендикуляров между парами (L_i, R_i) , где $L_i \in L$, $R_i \in R$

- Находим верхнюю пару (L_0, R_0) (самый верхний луч)
- Двигаемся вниз: на каждом шаге текущий перпендикуляр $L_i R_i$ пересекается с ребром левой или правой диаграмм; переходим в соседнюю ячейку
- Добавляем отрезки до пересечения
- Заканчиваем у нижней границы

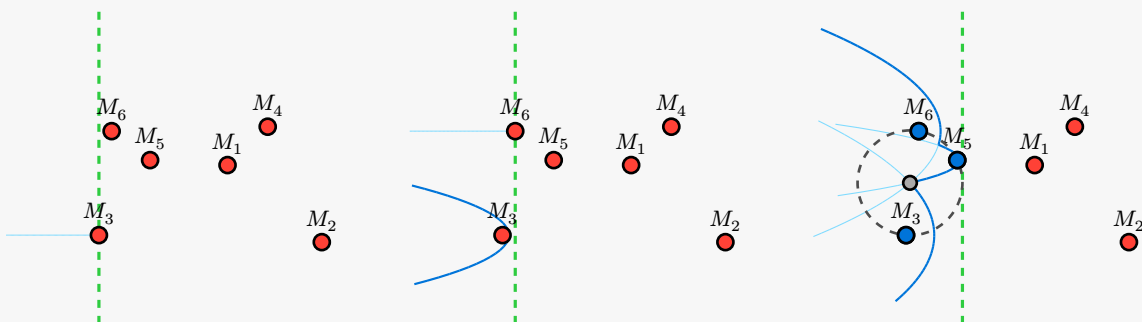


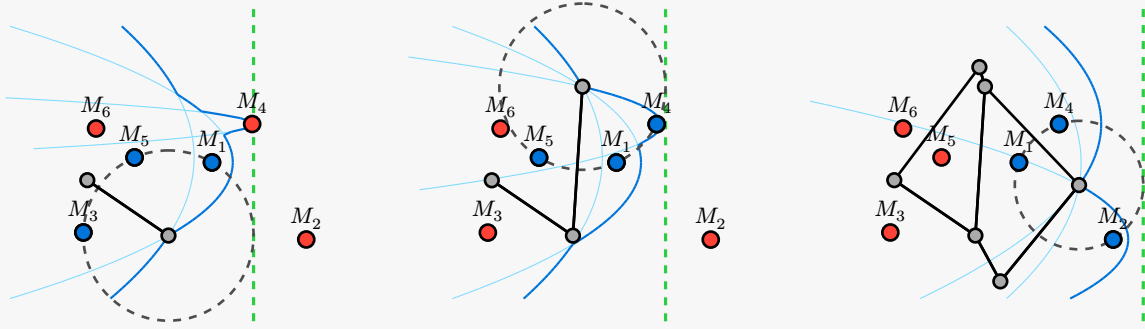
3. Добавляем новую ломаную как ребра между диаграммами, повторяем рекурсивно



- По алгоритму Форчуна (или алгоритм «береговой линий»), где используется заметающая прямая

1. Заметающая прямая (вертикальная или горизонтальная) движется слева направо
2. Когда прямая достигает очередной точки в береговую линию добавляется парабола, образованная заметающей прямой и этой точкой как фокусом
Точка пересечения двух парабол является равноудаленной от фокусом – такая точка будет лежать на ребре диаграммы Вороного
3. Три параболы пересекаются в одной точке, если эта точка равноудаленна от фокусов парабол (то есть фокусы лежат на окружность). Эта точка будет вершиной диаграммы Вороного





У вершин диаграммы, имеющих 2 ребра (такие находятся на границе), третье ребро строится как серединный перпендикуляр двух точек