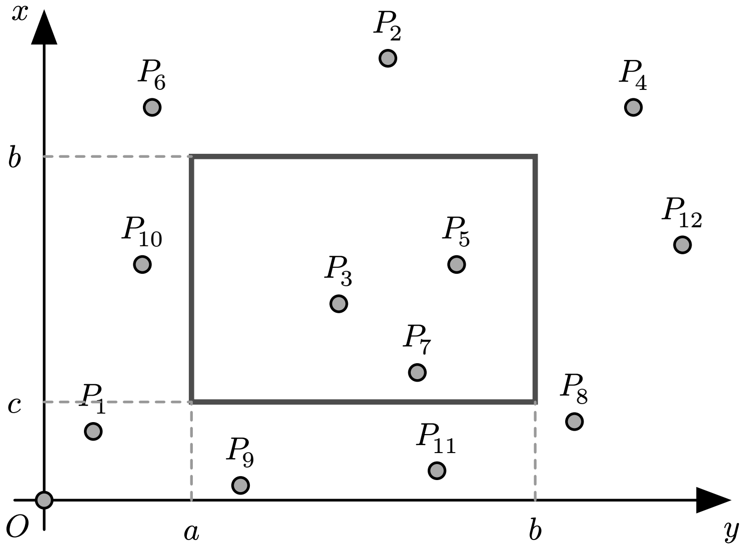
2.2 Локализация точки в многоугольнике

2.2.1 Локализация точки в прямоугольнике

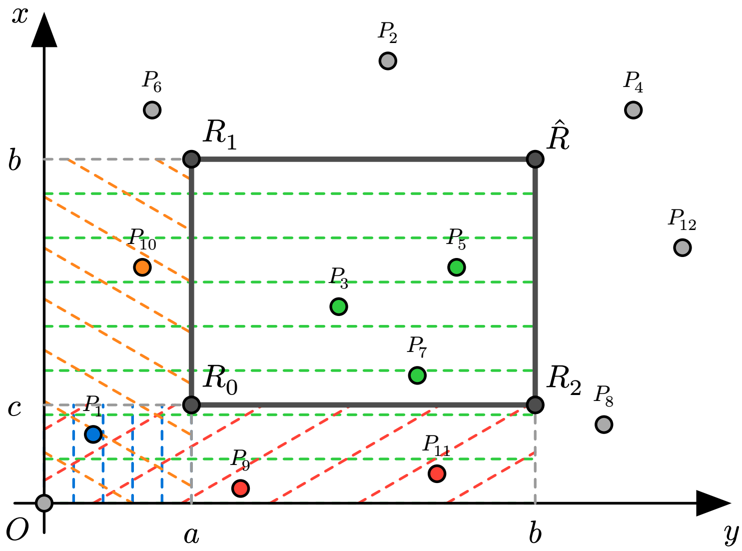
Задача состоит в том, чтобы понять, находится ли точка на плоскости внутри прямоугольника, стороны которого ориентированы параллельно координатным осям



Для точки $P_i(x, y)$ принадлежность определяется условиями $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

Можно упорядочиться процесс для определения принадлежности P_i ячейки прямоугольной сетки. Вводим отношение – «точка M доминирует над точкой N» или $N^M \iff \begin{cases} x_N \leq x_M \\ y_N \leq y_M \end{cases}$

Тогда найдем в прямоугольнике доминирующую вершину $\hat{R}$ (правый верхний угол). Обозначим $M(R)$ как множество точек, доминируемых вершиной R, а $Q(R)$ как количество этих точек



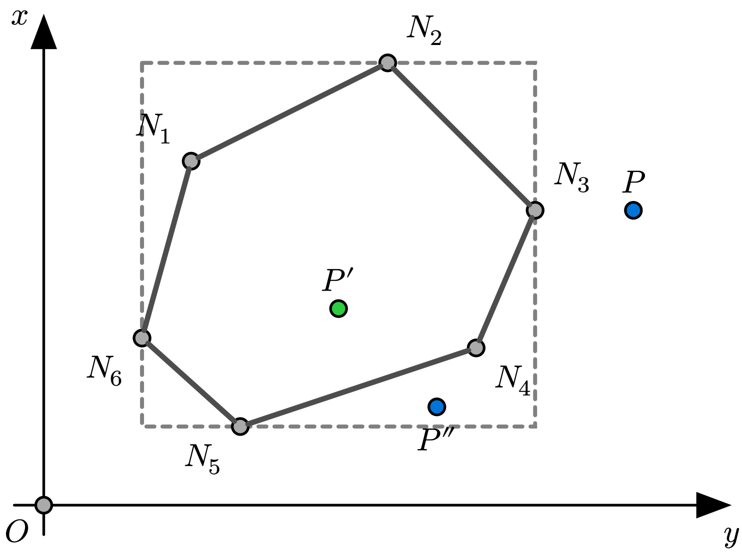
Тогда, чтобы найти, сколько точек находятся в прямоугольнике, воспользуемся формулой $Q\left(\hat{R}\right) - Q(R_1) - Q(R_2) + Q(R_0)$. А само множество задается как $M\left(\hat{R}\right) - M(R_1) - M(R_2) + M(R_0)$

2.2.2 Локализация точки в n-угольнике

Есть несколько методов:

1. Габаритный метод

   Пусть есть выпуклый n-угольник $\mathcal{N}$, нужно понять, находится ли точка внутри многоугольника

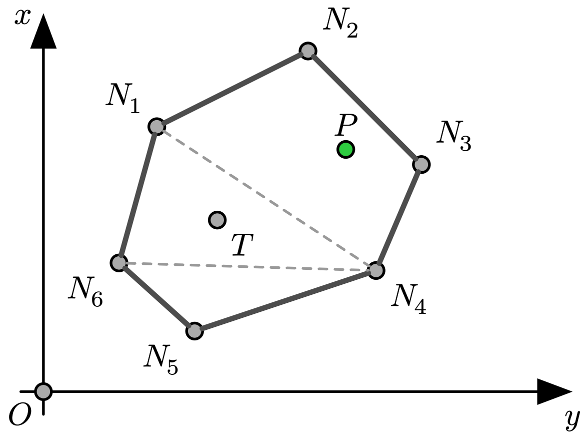
   

   Необходимым условием принадлежности точки внутри многоугольника – принадлежность точки внутри прямоугольника, которые описывает многоугольник. То есть можно проверить условия $x_P < x_{\min}$, $x_P > x_{\max}$, $y_P < y_{\min}$, $y_P > y_{\max}$

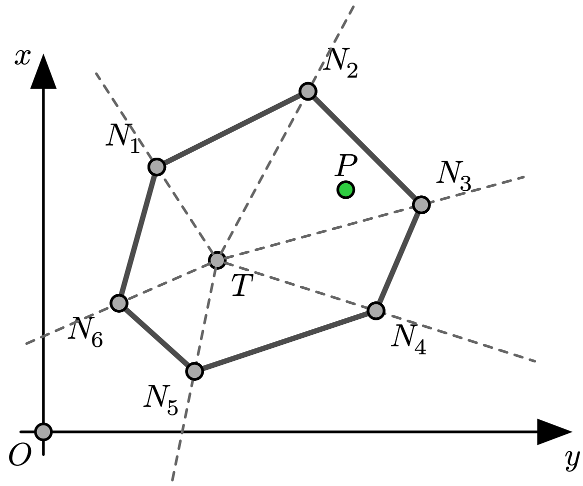
   Такой метод работает всего лишь для отсева непринадлежащих точек, но не поможет различить принадлежность точек P' и P''

2. Угловой метод

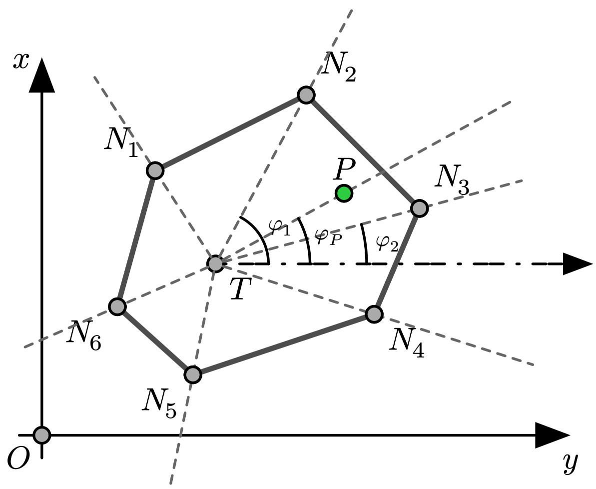
   Возьмем произвольную точку T внутри выпуклого многоугольника, например, центр тяжести одного из вписанного треугольника или угодно другую, которую легко определить



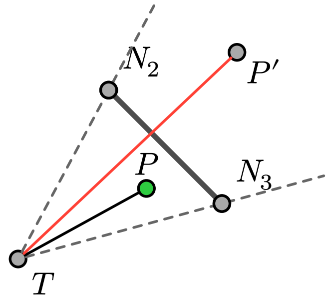
Из этой точки выпускаем лучи TN_i и луч TP



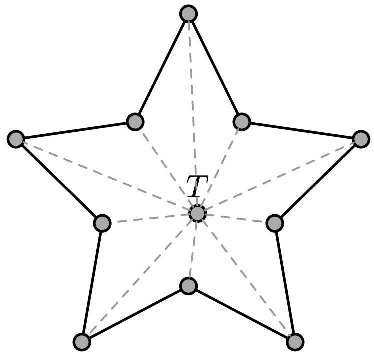
В выпуклом многоугольнике углы между лучами к вершинам и осью Ox будут упорядочены (такое не работает для невыпуклого многоугольника), поэтому, записав порядок углов для вершин N_i, находим угол φ_P для луча TP и углы φ_i, φ_{i+1} такие, что $\varphi_i \leq \varphi_P \leq \varphi_{i+1}$



Тогда точка P лежит в секторе N_iTN_{i+1}. Далее с помощью косого произведения определяем, лежит ли точка P в треугольнике N_iTN_{i+1}, то не пересекаются ли отрезки TP и N_iN_{i+1}



В звездчатом многоугольнике такой метод также работает, если выбрать точку в центре, но в произвольном невыпуклом (особенно с самопересечениями) такое не сработает

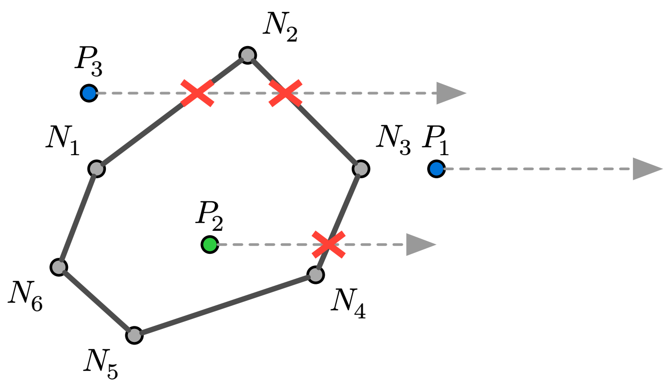


Если работа с углами представляет неудобства (так как синусы большинства углов – величины трансцендентные), то можно сравнивать ориентированные площади

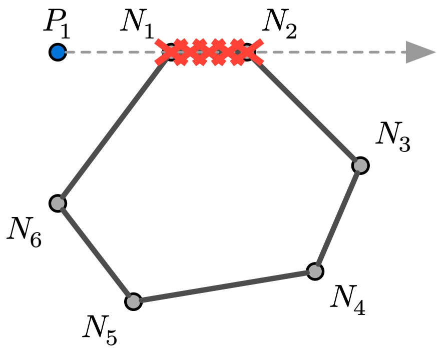
Ориентированная площадь имеет знак в зависимости от направление обхода ломаной, поэтому, если площади треугольников $\triangle PTN_i$, $\triangle PN_iN_{i+1}$ и $\triangle PN_{i+1}T$ одних знаков, то точка находится внутри $\triangle TNN_{i+1}$

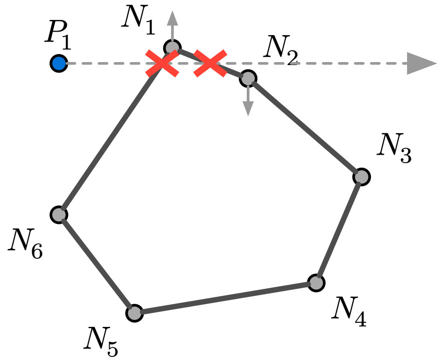
3. Лучевой метод

Лучевой метод заключается в выпускании луча из данной точки в произвольном направлении (например, в направлении Ox). Считаем, что если луч пересек ребра выпуклого многоугольника нечетное число раз (то есть ровно один), то точка находится внутри многоугольника



Здесь есть случай с подвохом: луч пересекает какую-либо вершину многоугольника (в том числе какое-либо ребро). В этом случае ординату вершины уменьшаем или увеличиваем на бесконечно малую величину:


P_1
N_1
N_2
N_3
N_4
N_5
N_6


P_1
N_1
N_2
N_3
N_4
N_5
N_6