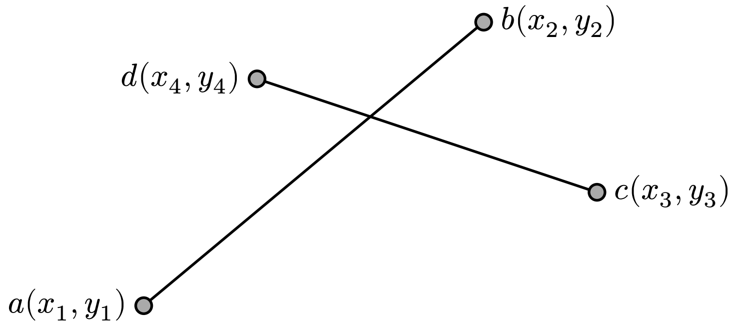
2. Геометрический поиск

2.1 Пересечение отрезков

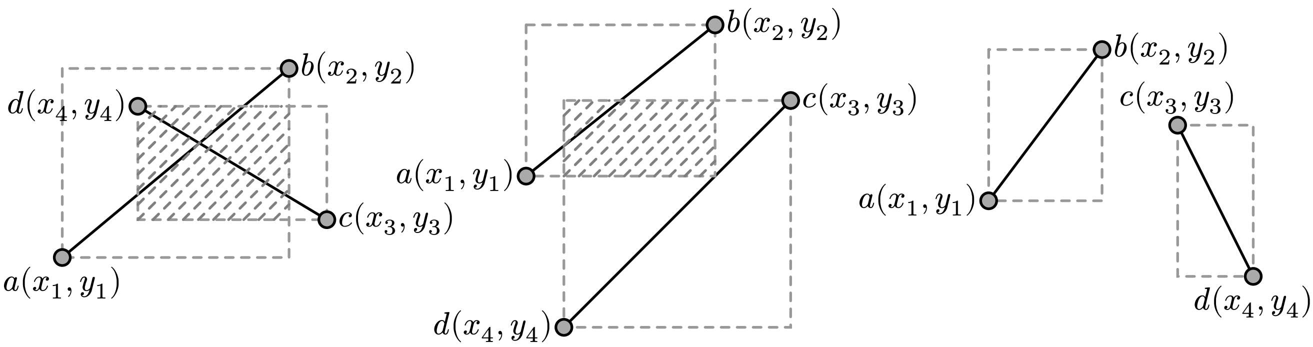
Геометрическая задача – определить, какие из N отрезков на плоскости пересекаются, и найти точки пересечения

Для начала рассмотрим два отрезка:



Отрезки будут заданы координатами вершин $a(x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$, $c(x_3, y_3)$, $d(x_4, y_4)$

Грубый способ определить то, что отрезки не пересекаются, – сравнить абсциссы $\min(x_1, x_2)$ и $\max(x_3, x_4)$ (или наоборот) или аналогично ординаты (то есть прямоугольники, где диагональ – отрезок)



Как видно, пересечение ограничивающих отрезки прямоугольников является *необходимым* условием для пересечения отрезков, но не **достаточным** (см. второй пример), поэтому применяют другие алгоритмы

Из школьной геометрии знаем, что любая прямая делит плоскость на две полуплоскости

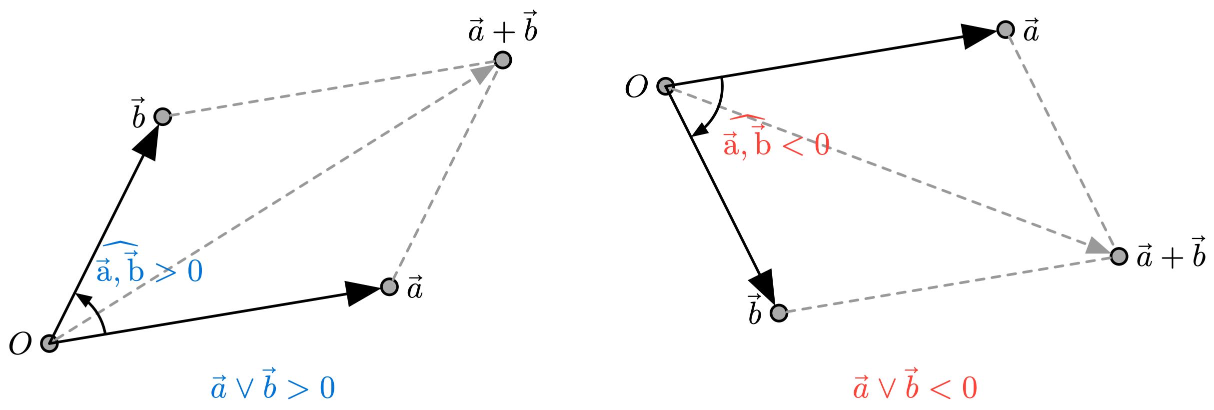
Если отрезки пересекаются, то точки c и d лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l (обратное при этом неверно)

Однако аналогично, если отрезки пересекаются, то точки a и b лежат в разных полуплоскостях относительно прямой p, образованной точками c и d

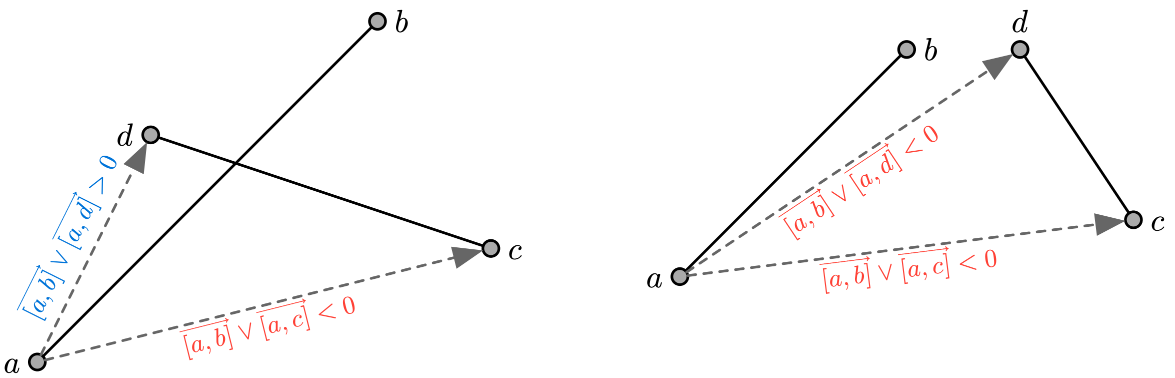
Теперь нужен алгоритм, который проверяет, что точки одного отрезка лежат по разные стороны относительно прямой другого отрезка

Мет. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ находятся на плоскости. Косое произведение $\vec{a} \vee \vec{b} \overset{\text{def}}{=} |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = |\vec{a} \times \vec{b}| = \pm\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}\right| = \pm\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right| = \pm\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ – площадь параллелограмма

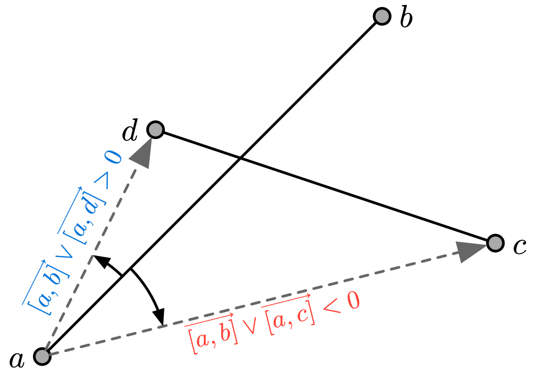
Косое произведение со знаком «плюс» равна площадь параллелограмма, образованными векторами, концы которых расположенные по часовой стрелке

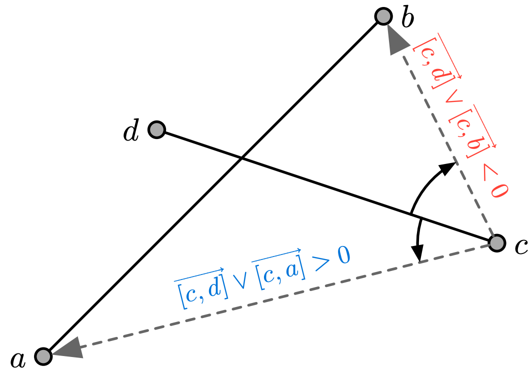


Применим к задаче. Косое произведение показывает ориентацию, поэтому, если точки находятся по разные стороны от прямой, то косые произведения $\overrightarrow{[a, b]} \vee \overrightarrow{[a, c]}$ и $\overrightarrow{[a, b]} \vee \overrightarrow{[a, d]}$ должны иметь разные знаки



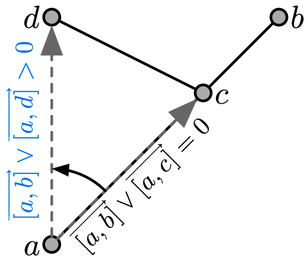
Аналогично проверяем произведения $\overrightarrow{[c, d]} \vee \overrightarrow{[c, a]}$ и $\overrightarrow{[c, d]} \vee \overrightarrow{[c, b]}$





Для непересекающихся отрезков одна пара произведений из двух будет иметь один знак

Nota. Если одна из точек одного отрезка находится на другом отрезке, то косое произведение равно 0



Теперь найдем саму точку пересечения. Нам известны уравнения прямых:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Далее решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 \\ x_4-x_3 & y_4-y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} k_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ k_2 = \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} \\ b_1 = y_1 - k_1 x_1 \\ b_2 = y_3 - k_2 x_3 \\ x = \frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} \\ y = k_1 x + b_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\left(y_3 - \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} x_3\right) - \left(y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} x_1\right)}{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}} \\ y = k_1 x + b_1 \end{cases}$

Результатом будет точка пересечения прямых. Так как прямые бесконечно длинные, то нужна дополнительная проверка, описанная выше, на то, что пересекаются действительно отрезки, а не только прямые

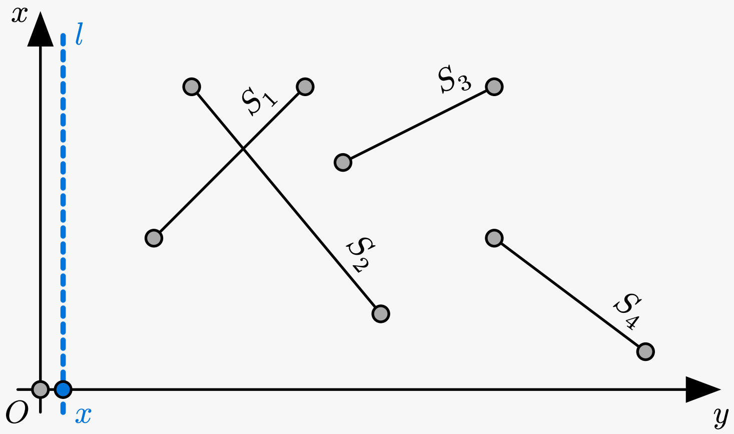
Nota. Если число отрезков велико, то проверка попарных пересечений очень затратна, асимптотическая сложность – $O(n^2)$

Поэтому применяют алгоритм «заметающей» прямой:

Сделаем допущение, что точки пересечения образуются пересечением только двух отрезков и нет вертикальных отрезков

Тогда:

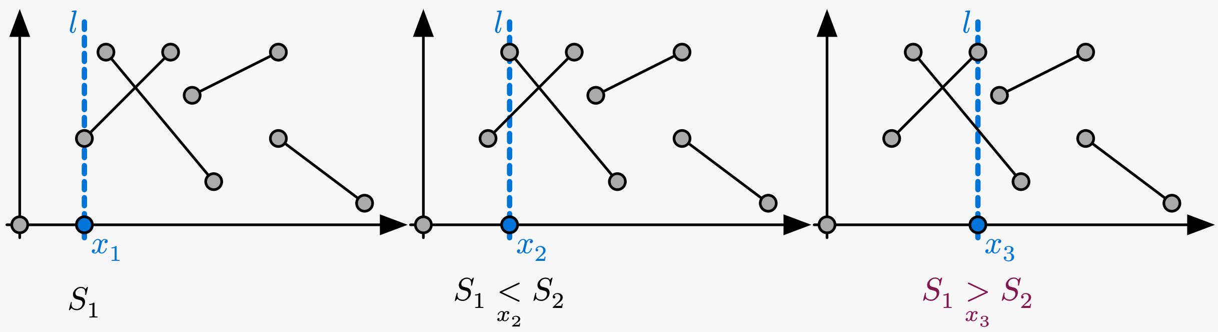
1. Берем вертикальную прямую l, проходящую через точку $(0, x)$
2. Все отрезки заданы списком координат их концов. Тогда можем отсортировать этот список по возрастанию абсцисс точек



3. Прямая l движется направо и пересекает концы отрезков. Встречу прямой с концами отрезков обозначим событием. Все отрезки, отвечающие событию x (точка с абсциссой x принадлежит этим отрезкам), называется смежными по x

   Далее вводим отношение сравнения отрезков S_i и S_j: $S_i \underset{x}{>} S_j$ (S_i выше S_j) означает, что в точке x ордината точки $S_i \cap l$ больше ординаты $S_j \cap l$

4. Если найдена смена отношения $\underset{x}{>}$ в разных событиях, то отрезки пересеклись



Сложность данного алгоритма составляет $O(n \log n)$