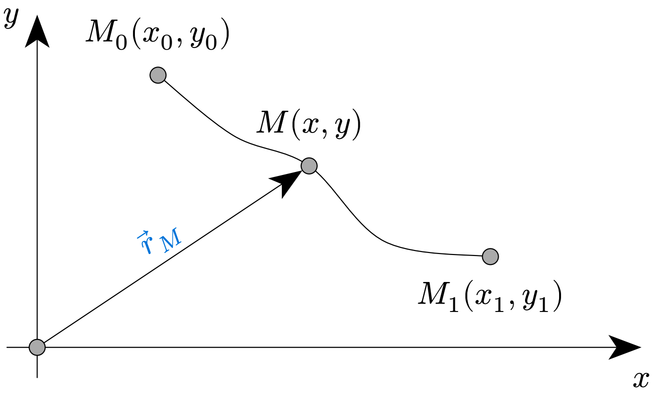
1.6 Моделирование плоских линий

1.6.1 Общие сведения



Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – базис (в частности $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ – декартов)

Радиус-вектор точки кривой γ определяется как $\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Чаще всего кривая γ ориентирована так, что задана начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ и пара уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [t_1, t_2]$. Интервал $[t_1, t_2]$ задают ориентацию

Таким образом, γ может быть задана:

- параметрически $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$
- общим уравнением $f(x, y) = 0$

Рассмотрим задания простых кривых:

1. Прямая

   $\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = t\vec{r}_1 + \vec{r}_0(1 - t)$

   Последнее выражение полезно, так как для $t \in [0, 1]$ уравнение задает отрезок M_0M_1: $\vec{r}(t)\mid_{t=0} = \vec{r}_0$, $\vec{r}(t)\mid_{t=1} = \vec{r}_1$

2. Окружность

   Параметрическое уравнение: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ для $t \in [0, 2\pi)$

   Радиус-вектор задается как $\vec{r}(t) = R(\vec{\imath}\cos t + \vec{\jmath}\sin t) = R(\cos t, \sin t)$

3. Кривая второго порядка в общем виде

   $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

   При этом один и более из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю

   Коэффициенты кривой можно представить в виде матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

   Коэффициенты a_{13} и a_{23} отвечают за перенос кривой, а a_{33} за масштаб

В однородных координатах $\vec{r} = (x, y) \longrightarrow (x, y, 1)$ получаем:

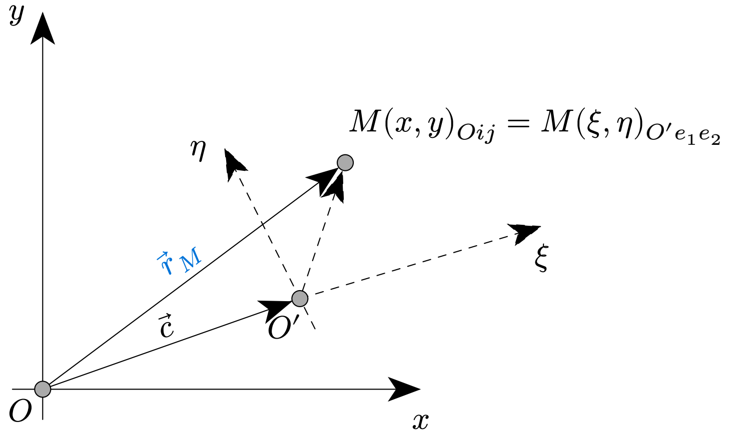
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix}$$

Если слева домножить на вектор-строку $(x, y, 1)$, то получим:

$$\begin{aligned}(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23}y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}\end{aligned}$$

Тогда общее уравнение кривой второго порядка в матричном виде записывается как $(x, y, 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Nota. Пусть есть аффинный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Нужно перевести координаты точки $M(\xi, \eta)$ из нового базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в координаты $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из нового базиса $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$



Радиус-вектор точки в базисе $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ равен $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2 + \vec{c}$. Здесь $\vec{c}$ – смещение начал координат

В однородных координатах это выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e_{1x} \\ \xi e_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta e_{2x} \\ \eta e_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $P = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & c_1 \\ e_{1y} & e_{2y} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица аффинного преобразования, где $\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} \\ e_{1y} & e_{2y} \end{pmatrix}$ – матрица приведения из базиса $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ в базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Такая матрица не меняет инварианты, поэтому можно делать подобные преобразования кривых:

$$(x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow (\xi, \eta, 1)PAP^{-1}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Def. Инварианты кривой второго порядка – выражения, значения которых остаются постоянными при применении аффинных преобразований:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тип кривой определяется по инвариантам:

- Если $I_2 > 0$, то кривая эллиптического типа
- Если $I_2 < 0$, то кривая гиперболического типа
- Если $I_2 = 0$, то кривая параболического типа

1.6.2 Дифференциальные характеристики

Мет. Для кривой $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Гладкость кривой – непрерывная дифференцируемость $x(t)$ и $y(t)$, то есть для всякой $M \in \gamma$ существуют $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(t)$, которая непрерывная
- Касательная – вектор (или прямая), имеющая одну общую точку с кривой в окрестности

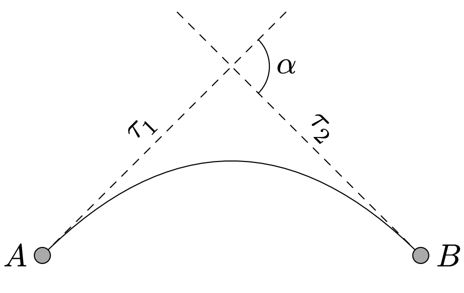
  Если кривая задается как $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, то касательная задается как производная:

  $$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$$

- Нормаль – перпендикуляр к кривой в точке. Вектор нормали задается как перпендикулярный к касательной: $\vec{n} \perp \vec{r}'$
- Длина дуги (элемента): $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = |\vec{r}'(t)|\ dt$

Рассмотрим новые характеристики для кривой:

- Кривизна кривой в точки



Касательная τ_1 переходит в τ_2 при $A \to B$, поворачиваясь на угол α – угол смежности

Средняя кривизна на дуге $\smile{AB}$ равна $K_{\text{ср}} = \dfrac{\alpha}{|\smile{AB}|}$

Def. Кривизна кривой γ в точке A определяется как $K_A = \lim\limits_{\substack{B \to A \\ \text{по } \smile{AB}}} K_{\text{ср}} = \lim\limits_{|\smile{AB}| \to 0} \dfrac{\alpha}{|\smile{AB}|}$

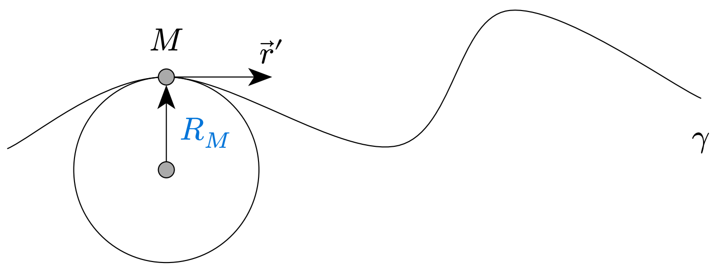
Ex. Окружность

$\angle AOB = \alpha, |\smile{AB}| = \alpha R$, тогда $K_A = \lim\limits_{B \to A} \dfrac{\alpha}{\alpha R} = \dfrac{1}{R}$

- Радиус кривизны

  Def. Величина $\dfrac{1}{K_A} = R_A$, обратная кривизне в точке, называется радиусом кривизны в точке

  Nota. У окружности радиус кривизны совпадает с ее собственным радиусом. Сама окружность – линия постоянной кривизны. Другая такая линия постоянной кривизны – прямая, где кривизна равна 0



- Центр кривизны

  Def. Центр кривизны кривой γ в точке M – это точка на нормали к γ в точке M на расстоянии R_M от M, находящаяся в той полуплоскости, разделенной касательной, что и окрестность кривой

  Def. Эволюта кривой – множество центров кривизны

Для характеристик можно выразить другие формулы:

- Кривизна $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \varphi'(s) = \dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dt}{ds} \overset{t=x}{=} \dfrac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$

  $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{dy}{dx}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{dy}{dx}$ – угол касательной

  $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y_x'^2}$

  $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$

  $K = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$

В параметрическом задании $K = \frac{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

- Центр кривизны: $\begin{cases} x_0 = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ y_0 = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$