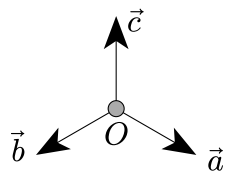
Также нам понадобятся:

- Уравнения плоскостей в пространстве
- Уравнения кривых второго порядка, специальных кривых (спирали, гипоциклоиды)
- Индикатор ориентации

  Мет. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{c} : \begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \text{ - правая тройка векторов} \end{cases}$$

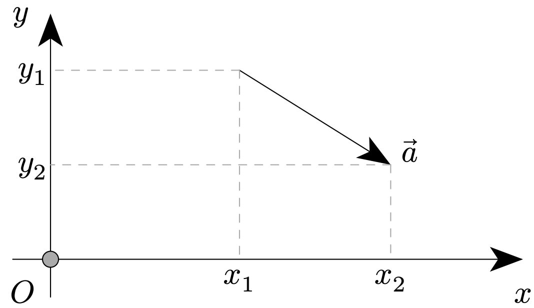


Def. Псевдоскалярное (или косое) произведение $\vec{a} \vee \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, причем произведение положительно, если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положителен (то есть против часовой), и отрицательно, если угол отрицателен (то есть по часовой)

1.5 Однородные координаты

Мет. В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует линейное пространство направленных отрезков. Проблема состоит в том, что нам нужно представить вектор с другим началом

Тогда такие вектора можно представить двумя точками



Чтобы работать с точками, а не векторами с общим началом O, обобщим понятие линейного пространства. Тогда понятие линейного пространства обобщается до аффинного, где элементы – это точки, а не векторы

Def. Пространство $\mathcal{A}$ – аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством V, если:

1. Заданы аксиомы для V
2. Существует $f : \mathcal{A} \to V$ такое, что для всякой пары сопоставляется вектор из линейного: $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad f(A, B) = \overrightarrow{AB} \in V$
3. Для всяких $A \in \mathcal{A}$ и $\vec{a} \in V$ существует единственная $B \in A \mid \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
4. Для всяких точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ справедливо, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

В аффинном пространстве $\mathcal{A}$ можно ввести аффинные преобразования. Те, что не связаны с переносом, можно считать линейными в пространстве V:

1. Осевая симметрия S_l, если $O \in l$

2. Поворот R_O^{φ}
3. Гомотетия H_O^k

Их можно представить в виде матрицы. Но перенос выводит из линейного пространства. Нам нужно все преобразования свести к алгебраическому действию $x' = \mathcal{F}x$, где $\mathcal{F}$ – преобразование с матрицей F

Движение плоскости и гомотетия дают формулу:

$$X' = FX + T_{\vec{a}}$$

Вместо

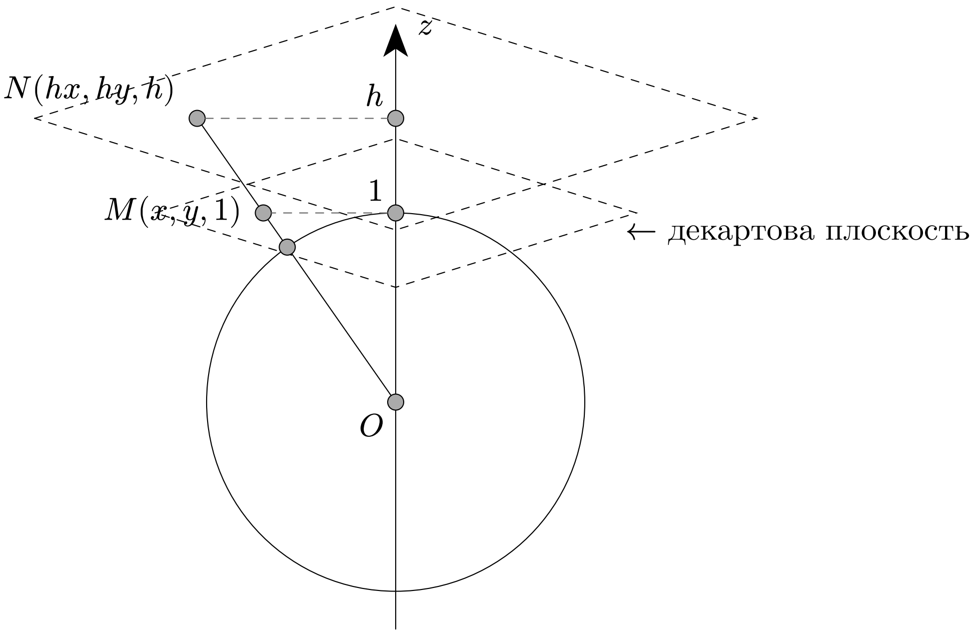
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

рассмотрим векторы с добавленной координатой $z = 1$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} f_{11} & f_{12} & x_0 \\ f_{21} & f_{22} & y_0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}x + f_{12}y + x_0 \\ f_{21}x + f_{22}y + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Координаты $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ называют однородными

Геометрическая интерпретация – стереографическая проекция Римана



Далее происходит центральное проектирование на плоскость $z = h, p(x, y) \rightarrow N(hx, hy, h)$

Таким образом, каждой точке декартовой плоскости ставится в соответствии точка сферы, а она центрально проектируется на плоскость $z = h$, где h отвечает за масштаб. В результате точкам декартовой плоскости (x, y) соответствуют точки

$(x, y, 1) = (hx, hy, h)$, а однородные координаты $(x, y, 0)$ представляют бесконечно удаленную точку декартовой плоскости в направлении вектора $\vec{a} = (x, y)$

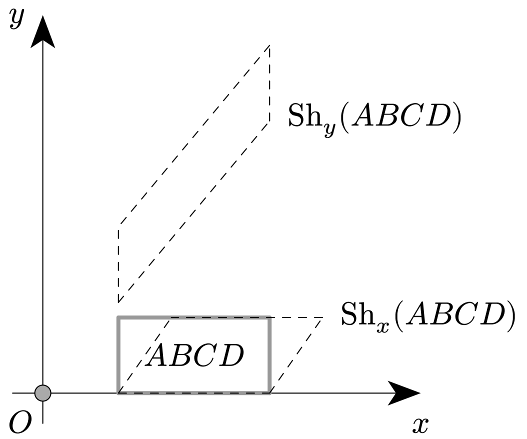
Рассмотрим матрицы преобразований в однородных координатах:

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hline p & q & s \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ представляет композицию из симметрии, поворота, гомотетии и сдвига

Def. Сдвиг (shear) Sh_x – наклонной перекос такой, что $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, а $k = \mathrm{sh}_x$

Аналогично по оси Oy сдвиг $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \mathrm{sh}_y\, x \end{cases}$



Вектор $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ – вектор переноса $T_{(m,n)}$, число s – масштаб

Рассмотрим смысл (p, q):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline p & q & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ px + qy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h \end{pmatrix}$$

При фиксированных p и q выражение $h = px + qy + 1$ задает наклонную плоскость в трехмерном пространстве, что позволяет изменять перспективу. На этом курсе операции, использующие p и q, рассматриваться не будут

Рассмотрим частные виды преобразований:

- Перенос $T_{m,n} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- Поворот $R_O^{\varphi} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по оси $S_{Ox} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Симметрия по биссектрисе $S_{x=y} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- Сдвиг $\mathrm{Sh}_x = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mathrm{sh}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ex. Дан $\triangle\, ABC$ с вершинами в координатах $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти $\triangle\, A'B'C' = \mathcal{F}(\triangle\, ABC)$

Найдем матрицу координат вершин $\triangle\, ABC$: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Преобразование осуществляется так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ b & d & h \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$