Из определения ясно, что для конечной точки $\operatorname{res}(f(z), z_0) = C_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^0} d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$

Для бесконечной $\operatorname{res}(f(z), z_0) = -C_{-1} = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta$

Здесь вместо γ берут для простоты окружность

Nota. Для вычисления вычетов используют более простые формулы, которые зависят от типа особых точек

Th. 1. z_0 – устранимая особая точка ($z_0 \in \mathbb{C}$) функции $f(z) \iff$ главная часть ряда Лорана равна 0

То есть $f(z)$ в z_0 представима как $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)$ тогда и только тогда, когда $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ z_0 – устранимая $\iff \displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$

Тогда в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ функция ограничена – $|f(z)| \le M, M \in \mathbb{R}$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{-n+1}} = \left[\gamma_\delta : \zeta = z_0 + \delta e^{i\phi}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\delta i e^{i\varphi} d\varphi}{(\delta e^{i\varphi})^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\delta^n e^{ni\varphi} d\varphi$$

$$|C_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\delta^n d\varphi = M\delta^n \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $C_{-n} = 0 \Longrightarrow f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$

$\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = C_0 \in \mathbb{C}$ – устранимая

Следствие: вычет в устранимой точке равен 0

Th. 2. z_0 – полюс m-ого порядка $\iff$ главная часть ряда Лорана содержит не более m ненулевых членов подряд (то есть для $i > m$ $C_{-i} = 0$)

Полюс m-ого порядка функции $f(z)$ – точка z_0, для которой $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ и z_0 – ноль функции $g(z)$ порядка m

То есть $g(z)$ представима как $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая в z_0 и $h(z_0) \ne 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Рассмотрим $\dfrac{1}{h(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$, при этом $\dfrac{1}{h(z_0)} = b_0 \ne 0$ ($h(z)$ – аналитическая $\Longrightarrow \dfrac{1}{h(z)}$ – аналитическая $\Longrightarrow \dfrac{1}{h(z)}$ – регулярная)

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^m}(b_0 + b_1(z-z_0) + \dots) =$$
$$\underbrace{\frac{b_0}{(z-z_0)^m}}_{\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}\neq 0} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}} + \dots = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

При этом $C_{-n} = 0$ при $n \geq m+1$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = \frac{C_{-m}}{z-z_0}^m + \dots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots =$ $\frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{(C_{-n} + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + C_0(z-z_0)^m + \dots)}_{\text{аналитическая } \frac{1}{h(z)} \text{ в } z_0} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)} \Longrightarrow z_0$ – ноль функции $g(z) = (z-z_0)^m h(z)$

Тогда $f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} \infty \Longrightarrow z_0$ – полюс (порядок бесконечно большой равен m)

Th. 3. z_0 – существенно особая точка $\Longleftrightarrow$ главная часть содержит бесконечное число члено

Очевидно, так как в другом случае, точка была бы полюсом или устранимой

Nota. Для особой точки $z_0 = \infty$ **Th. 1.**, **Th. 2.**, **Th. 3.** справедливы и доказываются аналогично:

1. z_0 – устранимая $\Longleftrightarrow$ главная часть равна 0
2. z_0 – m-полюс $\Longleftrightarrow$ главная часть содержит не более m членов и $C_m \neq 0$
3. z_0 – существенно особая $\Longleftrightarrow$ главная часть содержит бесконечное число членов

Ex. 1. $f(z) = \frac{(e^z-1)^2}{1-\cos z}$, $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{(e^z-1)^2}{1-\cos z} \underset{z\to 0}{\sim} \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}} = 2$ – устранимая

Ex. 2. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} - 1\right) \sim \frac{1}{z}\cdot k\frac{z^2}{1} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$ – устранимая

Ex. 3. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = \infty$

$z = \frac{1}{w}$ $\quad f(z) = \tilde{f}(w) = w\frac{1}{\frac{1}{w}-1} = w^2\frac{1}{1-w} = w^2\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$ – устранимая (главной части нет)

Вычисления вычетов

Nota. z_0 – устранимая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z), z_0) = 0$

z_0 – существенно особая $\Longrightarrow \operatorname{res}(f(z), z_0) = \pm C_{-1}$

Th. z_0 – простой полюс ($m = 1$). Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots$$

$$(z - z_0)f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+1} \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = C_{-1}$$

Th. z_0 – m-полюс. Тогда $\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z - z_0)^m)$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots \quad \Big| \cdot (z - z_0)^m$$

$$f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots \quad \Big| \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1}(m-1)! + C_0(z - z_0)(m-1)! + C_1(z - z_0)^2\frac{(m-1)!}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z - z_0)^m) = C_{-1} + C_0(z - z_0) + C_1(z - z_0)^2\frac{1}{2!} + \dots$$

Далее переход к пределу, аналогичному доказательству выше

Th. Теорема о вычетах.

1. $f(z)$ аналитична в D кроме особых точек $z_1, \dots, z_n$. Тогда $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$
2. $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ кроме особых точек $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k) = 0$

1. По теореме Коши (о многосвязной области) $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$, где $C_{-1}^{(k)}$ – коэффициент для ряда Лорана в точке z_k

2. Очевидно по теореме Коши