**Th. Морера.** $f(z)$ непрерывна в $D$ и $\forall \gamma \subset D$ $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow f(z)$ аналитична в $D$

При данных условиях $\exists \Phi(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \mid \Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитична
Так как $\Phi(z)$ дифференцируема, то она дифференцируема сколько угодно раз. Таким образом, существуют $f'(z), f''(z)$ и так далее, а из этого означает, что $f(z)$ – аналитична

**Th. Лиувилля.** $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ и $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(z)| \le M \; \forall z \in \mathbb{C}$
Тогда $f(z) \equiv \text{const}$

Докажем, что $f'(z) = 0$

$$|f'(z)| = \left[\text{контур } \gamma \text{ – круг } z + \rho e^{i\varphi}\right] = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi}}{\rho^2 e^{2i\varphi}}d\varphi\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\right|d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{\rho}d\varphi = \frac{M}{\rho} \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f(z) = \text{const}$$

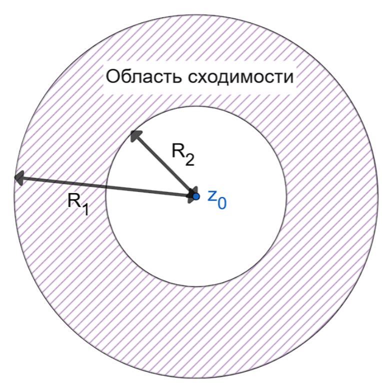
*Nota.* $w = \sin z \ne \text{const} \Longrightarrow \sin z$ – неограниченная функция

## 4.4. Ряд Лорана

**Def.** Ряд вида $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, где $C_n, z_0 \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана в точке $z_0$

*Nota.* Исследуем ряд. Обозначим $f_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

$$f_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-z_0)^n \overset{m=-n}{\Longrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$$




Тогда ряд можно записать так: $C_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n(z-z_0)^n + \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}\right)$

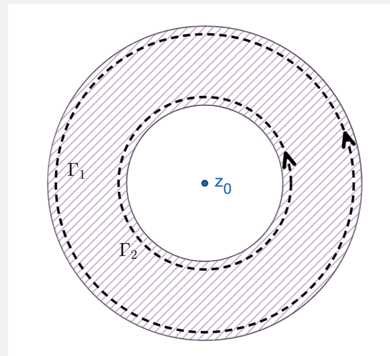
Рассмотрим $f_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ – ряд согласно теореме Абеля сходится в круге с центром $z_0$ и радиусом $R_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

Рассмотрим $f_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} \overset{t=\frac{1}{z-z_0}}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}t^n$ – ряд сходится в круге $|t| < r = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n}}{C_{-n-1}}\right|$ или $|z-z_0| > \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right| = R_2$

Таким образом, ряд Лорана сходится в *кольце* с внутренним радиусом $R_2$ и внешним радиусом $R_1$ и центром $z_0$ к значению некой аналитической функции $f(z)$

$f(z)$, аналитичная в кольце $K = (z_0, R_2, R_1)$, однозначно представима рядом Лорана в кольце $K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \overset{\Gamma=\Gamma_2\cup\Gamma_1}{=\!=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$




Разложим $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}))} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ \frac{1}{-(z - z_0)(1 - (\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}))} = -\sum_{n=1}^\infty \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{array}\right.$$

1. Первый ряд сходится, если $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| < |\zeta - z_0|$ – это $\Gamma_1$

Также $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

По теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty \left(\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty C_n (z - z_0)^n$$

Из этого $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

2. Второй ряд сходится, если $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1 \iff |z - z_0| > |\zeta - z_0|$ – это $\Gamma_2$

Lab.

*Nota.* Таким образом, коэффициенты ряда Лорана $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$

**Def.** Изолированной особой точкой однозначного характера называется точка $a \in \mathbb{C} \mid f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < \rho$, но не определена в $z = a$

**Def.** Точка $a = \infty$ называется изолированной особой, если $f(z)$ аналитична в кольце $\rho < |z| < \infty$

**Def.** Устранимой особой точкой $a$ называется точка, для которой $\lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$, в $a$ функция не определена

Полюсом $a$ называется точка, для которой $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Существенно особой точкой $a$ называется точка, для которой $\nexists \lim\limits_{z \to a} f(z)$

*Ex. 1.* Для $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой – $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$

*Ex. 2.* Для $f(z) = \dfrac{z}{(z+i)^2}$ $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z}{(z+i)^2} = \left[\dfrac{1}{0^2} = \infty^2\right]$, $a = -i$ - полюс 2-ого порядка

*Ex. 3.* Для $f(z) = \sin z$ $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} \sin z$

**Def.** Для ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a \in \mathbb{C}$ $f(z) = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n}_{\text{это правильная часть}} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{C_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{это главная часть}}$

**Def.** Для ряда Лорана в $a = \infty$: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n z^n}_{\text{это главная часть}} + \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{это правильная часть}}$

**Def.** Вычетом $\operatorname{res}(f(z), z_0)$ функции $f(z)$ в точке $z_0$ называется $C_{-1}$ коэффициент ряда Лорана, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $-C_{-1}$, если $z_0 = \infty$