Свойства комплексного интеграла:

1° Линейность

2° Аддитивность

3° Смена знака: $\displaystyle\int_{K^+} = -\int_{K^-}$

4° Оценка, модуль: $\displaystyle\left|\int_K\right| \le \int_K |f(z)|dz$

5° $\displaystyle\int_K f(z)dz \overset{z=g(w)}{=} \int_C f(g(w))g'(w)dw =$ [В частности переход к параметру $t$] $\displaystyle= \int_{C(t)} f(t)g'(t)dt$

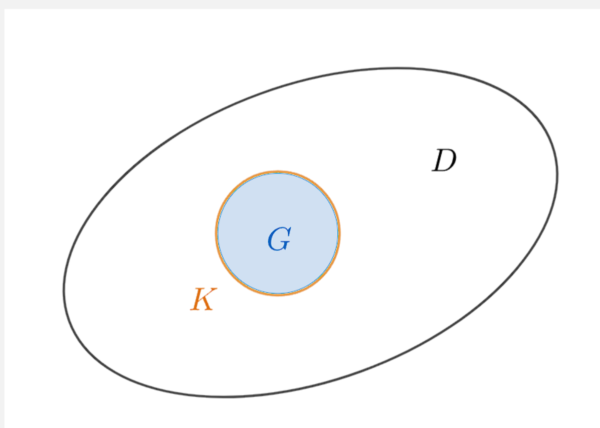
*Ex.* $\displaystyle I = \int_{K:|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} \overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_K \frac{d\rho e^{i\varphi}}{\rho e^i \varphi} = \int_K \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^i\varphi} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$

Интеграл $I$ не зависит от радиуса и центра окружности (то есть контура интегрирования), то есть интеграл функции $\dfrac{1}{z-z_0}$ будет равен $2\pi i$ для любой окружности в качестве контура

## 3.2. Теорема Коши

**Th. 1.** $f(z)$ аналитическая и однозначная в односвязной области $D$

Если $f(z)$ непрерывна на $\Gamma_D$, то $\displaystyle\oint_{\Gamma_D} f(z)dz = 0$




Запишем интеграл по контуру $K \subset D$ ($K$ - кусочно гладкая):

$$\int_K f(z)dz = \int_K udx - vdy + i\int_K udy + vdx = I_1 + I_2 i$$

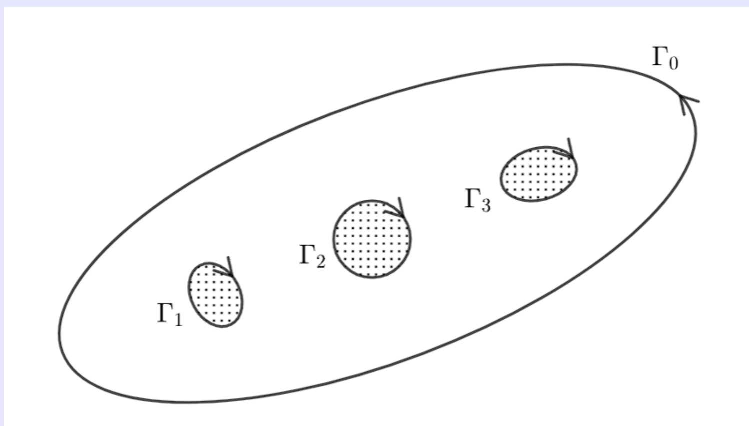
$$I_1 = \int_K \underbrace{P(x,y)}\underbrace{u(x,y)}dx - \underbrace{Q(x,y)}\underbrace{v(x,y)}dy = \begin{bmatrix} f(z) \text{ - аналитическая} \Longrightarrow \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ существуют} \\ \text{и непрерывны} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}_{\text{Формула Грина}} = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Аналогично $I_2 = \int_k udy + vdx = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0$
Таким образом, $\oint_{K\subset D} f(z)dz = 0$ - формула Коши
Так как $f(z)$ непрерывна на $\Gamma_D$, то можно взять $K = \Gamma_D$

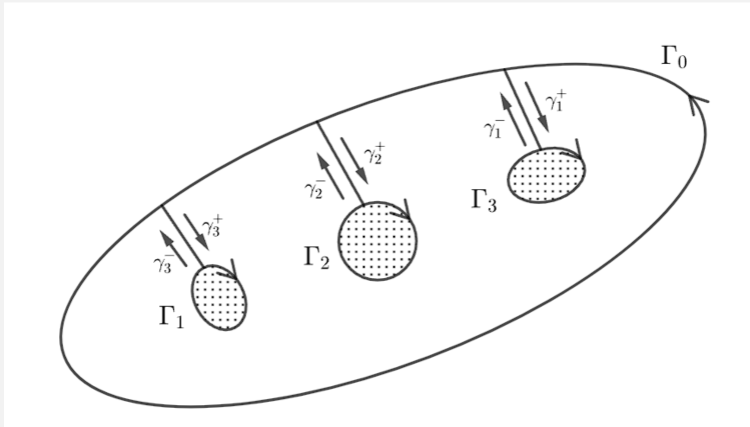
*Nota.* Получим, что интеграл по любому замкнутому $\Gamma_D$ контуру в области аналитичности равен нулю
То есть $\int_{AB} f(z)dz$ в условиях **Th. 1.** не зависит от пути, и его можно решать как $\int_{AB} = \int_A^B$

*Nota.* Обобщим **Th. 1.** на многосвязную область. Выколотые области тоже имеют границы, которые включены в границу всей области




**Th. 2.** Дана многосвязная область $D$, $f(z)$ - аналитична в $D$ и непрерывна на $\Gamma_D$
Граница $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$, где положительным обходом области считается тот, при котором область обхода слева
Тогда $\int_{\Gamma_D^+} f(z)dz = 0$ или $\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i \circlearrowleft} f(z)dz$

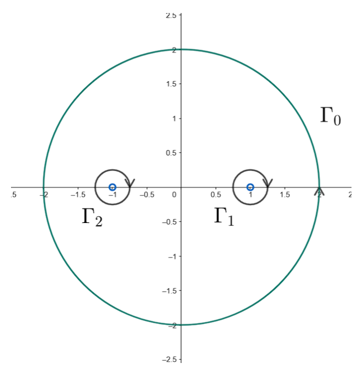
Сделаем разрезы как на картинке. Разрезы превратили область $D$ в односвязную с границей $\Gamma' = \Gamma_0 \cup (\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \Gamma_1) \cup \dots = \Gamma_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i^+ \cup \gamma_i^- \cup \Gamma_i)$




По **Th. 1.** $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0 \Longleftrightarrow \int_{\Gamma_D} f(z)dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots = 0$

Но $\displaystyle\int_{\gamma_1^+} = -\int_{\gamma_1^-}$, поэтому $\displaystyle\int_{\Gamma_D^+} = \sum \int_{\Gamma_i^-}$ или $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} = \sum \int_{\Gamma_i \circlearrowleft}$

*Ex.* $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz$




По **Th. 2.** $\displaystyle\int_{\Gamma_0 \circlearrowleft} f(z)dz + \int_{\Gamma_1 \circlearrowright} f(z)dz + \int_{\Gamma_2 \circlearrowright} f(z)dz = 0$

Тогда $\displaystyle\int_{|z|=2 \circlearrowleft} f(z)dz = \int_{|z-1|=\rho_1 \circlearrowleft} f(z)dz + \int_{|z+1|=\rho_2 \circlearrowleft} f(z)dz$, где $\rho_1$, $\rho_2$ - радиусы бесконечно малой длины

## 3.3. Неопределенный интеграл

*Мет.* По теореме Барроу $\displaystyle\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

Тогда $\Phi(x)$ - дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$, то есть $\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$

**Th.** $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D$ и $\forall \Gamma \subset D$ $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$

Тогда при фиксированном $z_0 \in D$ $\displaystyle\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ аналитична в $D$ и $\Phi'(z) = f(z)$

Если $\forall \Gamma$ $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$, то $\displaystyle\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} F(\zeta)d\zeta$ - интеграл, не зависящий от пути, а только от $z_0$ и $z$

Рассмотрим $\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta =$
$\dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta) - f(z) + f(z))d\zeta = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta) - f(z))d\zeta =$

$\zeta\Big|_z^{z+\Delta z}$

$\Delta z f(z) + \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta$

$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|d\zeta \le \max\limits_{[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|\Delta z$

Так как $f(z)$ непрерывна в $D$ и $z,\zeta \in D$, то $\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta) = f(z) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ |f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid 0 < |\zeta - z| < \delta\ \max|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$

То есть $\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \varepsilon\Delta z$

Или $\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} \le f(z)+\varepsilon$, то есть $\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$, или $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)$

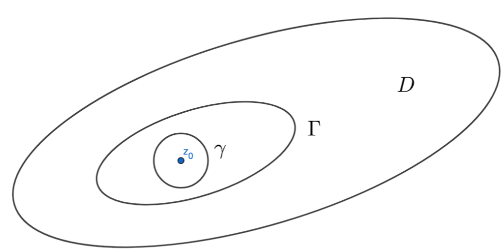
**Def.** $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ называют первообразной для $f(z)$

Следствие - формула Ньютона-Лейбница: $\boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)}$

## 3.4. Интеграл Коши

*Nota.* Установим связь между щначениями $f(z)$ во внутренних точках области и на ее границе

$f(z)$ аналитична в обносвязной области $D$, $z_0 \in D$. Окружаем $z_0$ контуром $\Gamma \in D$ и меньшим контуром $\gamma : |z - z_0| = \rho$




В кольце между $\gamma$ и $\Gamma$ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ (в кольце $\varphi(z)$ аналитична)

По **Th. 2.** для $\varphi(z)$ в многосвязной области $\int_{\Gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta$ - не зависит от пути

То есть выбор окружности в качестве $\gamma$ не важен:

$$\int_{\gamma\circlearrowleft}\varphi(\zeta)d\zeta \overset{z-z_0=\rho e^{i\varphi}}{=} \int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\rho i e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\varphi = \underbrace{i\int_0^{2\pi}(f(\zeta)-f(z_0))d\zeta}_{\text{стягиваем } \gamma \text{ в точку } z_0, \int\to 0} + i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\zeta =$$

$if(z_0)\cdot 2\pi$

Тогда $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_\gamma \varphi(\zeta)d\zeta = 2\pi i f(z_0)$

*Nota.* Доказали теорему: в области аналитичности $\forall z_0 \in D$ $\int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

*Ex.* $\int_{|z|=2 \circlearrowleft} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)}dz = \int_{|z-1|=\rho_1 \circlearrowleft} \frac{\frac{f(z)}{z+1}}{z-1}dz + \int_{|z+1|=\rho_2 \circlearrowleft} \frac{\frac{f(z)}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{-2}\right)$