2. Комплексная функция

2.1. Определение

Mem. $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall x \in E\ \exists! y \in D \mid y = f(x)$

Def. $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ отображение такое, что $\forall z \in D\ \exists w \in G \mid f(z) = w$
Def. Если $\forall z \in D\ \exists! w \in G$, то f называется однозначной функцией
Def. Если $\forall z_1, z_2 \in D (z_1 \neq z_2) \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, то f называется однолистной функцией

Ex. 1. $w = \sqrt{z}$ - неоднозначная функция
$\sqsupset z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$
$\sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos \dfrac{2\pi k}{2} + i \sin \dfrac{2\pi k}{2}\right)$
$w_1 = 1, \quad w_2 = -1$

Ex. 2. $w = z^2$ - неоднолистная функция
$z_1 = 1, z_2 = -1 \qquad w(z_1) = w(z_2) = 1$

Nota. Если $f(z)$ однозначна и однолистна, то $f(z)$ - взаимно однозначное соответствие (биекция).
Тогда $\exists g(x) \mid g(f(x)) = x$
Комплексную функцию $f(z)$ можно представить как $u(x,y) + iv(x,y)$, где $x + iy = z$

Ex. $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$
$u(x,y) = (x^2 - y^2), \qquad v(x,y) = 2xy$

2.2. Предел функции

Def. $L \in \mathbb{C}, f : D \longrightarrow G, \quad L \overset{def}{=} \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\exists \delta > 0} \Big|\ z \in D, z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\ f(x) \in U_\varepsilon(L)$
В определении существование и значение L не должно зависеть от пути, по которому z приближается к точке сгущения z_0. Может быть так, что для любого направления стремления предел есть, но в общем смысле не существует

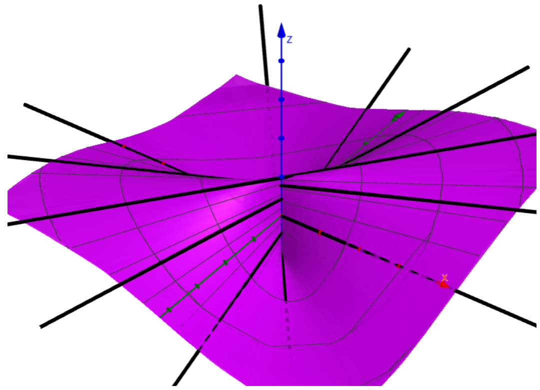
Ex. $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right) \qquad \sqsupset z = \rho e^{i\varphi}$

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} - \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{2i}(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

Зафиксируем $\varphi = \varphi^* \in [0; 2\pi)$, тогда $\sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} f(z) = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi^*}} \sin 2\varphi = \sin 2\varphi^* \in [-1; 1]$

Значения предела занимает отрезок $[-1; 1] \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$



На рисунке изображена $\sin 2\varphi$, на оси Oz изображена $\operatorname{Re} w$. Черные линии - это возможные пути приближения z к 0

Nota. Путь следования предела аналогичен левостороннему и правостороннему пределами $\mathbb{R}$-функций

Def. Непрерывность функций в точке z_0.

$f : D \longrightarrow G, z_0 \in D$, $f(z)$ называется непрерывной в z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

На языке приращений: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \underset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \Delta\rho \to 0$$

2.3. Элементарные комплексные функции

Ex. 1. Линейная $f(z) = az + b$, $\quad a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$

Эта функция однозначная, однолистная $\Longrightarrow \exists f^{-1}(z) = g(z) = \dfrac{z-b}{a}$

Геометрический смысл:

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

$az = |a||z|(\cos(\varphi_a + \varphi_z) + i\sin(\varphi_a + \varphi_z))$ - поворот и растяжение ($\varphi_a = \arg a$, $\varphi_z = \arg z$)

$az + b = (x_{az} + x_b) + i(y_{az} + y_b)$ - сдвиг

То есть линейная функция - композиция из поворота, растяжения и сдвига

Ex. 2. Степенная $w = z^n$, $\quad n \in \mathbb{N}$ - однозначная, может быть неоднолистной

Для $n \in \mathbb{Q}$ функция становится неоднозначной

Ex. $w = z^2 \qquad z = \rho e^{i\varphi}, w = \rho^2 e^{2i\varphi}$

Пусть $z_1 \neq z_2$ и $w(z_1) = w(z_2)$, тогда $\arg z_1 = \arg z_2 \pm \pi$

$w(z_1) = \rho^2 e^{2i\arg z_1} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + 2\pi k)}$

$w(z_2) = \rho^2 e^{2i\arg z_2} = \rho^2 e^{2i(\arg z_1 + \pi)} = \rho^2 e^{i(2\arg z_1 + 2\pi)} = w(z_1)$

Область однолистности z^2 - множество точек, для которых $\arg z \in [0; \pi)$

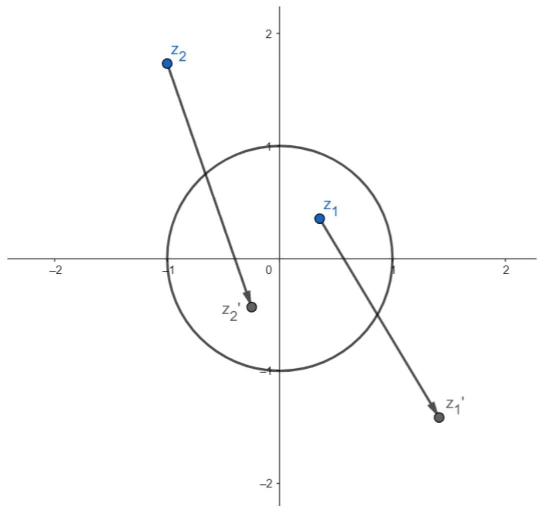
Точку $w = 0$ называют точкой разветвления

Ex. $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ $\qquad w(0) = \infty, w(\infty) = 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - функция обратима

$w = re^{i\psi} = \dfrac{1}{\rho e^{i\phi}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \Longrightarrow |w| = \dfrac{1}{|z|}, \arg w = -\arg z$

Преобразование $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ называется инверсией, а $\arg w = -\arg z$ дает симметрию относительно $\operatorname{Re} z$



Ex. 3. Рациональная $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $\qquad n, m \in \mathbb{N}$

Ex. 4. Показательная $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

<u>Свойства</u>:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$
3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ - показательная функция периодична с периодом $2\pi i$

Ex. 5. Логарифмическая $w = \operatorname{Ln} z$

Если $e^w = e^{u+vi} = e^u(\cos v + i \sin v) = z = |z|e^{i \arg z}$, то $u = \ln |z|$, $v = \arg z + 2\pi k$

Тогда $\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\ln z = \operatorname{Ln} z$ при $k = 0$ - т. н. главное значение